

Curso de Hidráulica General

(Continuación)

35. Pérdidas de cargas singulares.—Estudiaremos en este párrafo las generalidades comunes a todas las singularidades en que se origina una pérdida de carga en contorno cerrado, y que tienen interés para la práctica del ingeniero. Estas singularidades son de tres clases: a) Variaciones bruscas de sección en tubos cilíndricos o prismáticos, con contracción de entrada o sin ella (Fig. 57 y 57 a), entre las cuales están las paredes gruesas (Fig. 58) y algunos tipos de llaves. Al final de



Fig. 57



Fig. 57 a

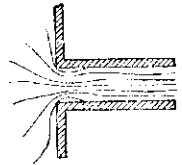


Fig. 58

estas singularidades la sección es determinada por el contorno sólido y carecen de contracción de salida. b) Variaciones continuas de la sección: conos convergentes y divergentes. En los primeros puede existir únicamente pérdidas por frotamientos, como sucede en las boquillas, y tienen generalmente contracción final (Fig. 59). (c) Variaciones de dirección del eje de la corriente, como en codos y curvas, en que los filetes, en virtud de la inercia, tienden a seguir la dirección primitiva, originando una perturbación con pérdida de carga (Fig. 60).

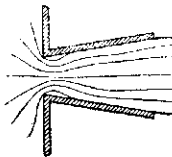
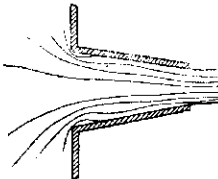


Fig. 59

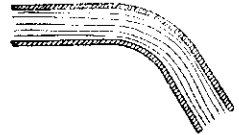
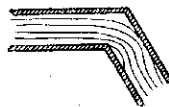


Fig. 60

Las pérdidas de carga o de Bernoulli se pueden contar en pérdidas de altura de presión o de velocidad. De esta suerte, como se dijo al hablar de los coeficientes de contracción, si se prescinde de los frotamientos interiores, existe semejanza mecánica de disposiciones geométricas semejantes. De aquí se deduce que el *factor de resistencia*, o número que, multiplicado por $U^2/2g$, nos da la pérdida de carga, depende solamente de la forma geométrica de la disposición, y por lo tanto, es constante en una singularidad. La pérdida de carga se expresa siempre, como se dijo en el Capítulo III, § 21), por $\lambda \frac{U^2}{2g}$, siendo λ el factor de resistencia constante.

En cualquier singularidad, la aplicación del teorema de Bernoulli desde una sección anterior a ella hasta otra posterior en que rija la ley hidrostática, llamando como siempre H el exceso de suma de Bernoulli de aguas arriba sobre la cota piezométrica de aguas abajo, nos da:

$$H = \frac{U^2}{2g} + \lambda \frac{U^2}{2g} = (1 + \lambda) \frac{U^2}{2g} \quad (10)$$

$$U = \frac{I}{\sqrt{1 + \lambda}} \sqrt{2gH} \quad (11)$$

Según la definición dada anteriormente, $\frac{I}{\sqrt{1 + \lambda}}$ es el coeficiente de velocidad, y por lo tanto:

$$\varphi = \frac{I}{\sqrt{1 + \lambda}} \quad \lambda = \frac{I}{\varphi^2} - 1 \quad (12)$$

La ecuación de arriba da también:

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} H = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (13)$$

lo que indica que $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = 1 - \varphi^2$ es la parte de carga consumida en la pérdida.

El coeficiente φ varía de 1 a 0, y se tienen los siguientes valores numéricos:

| | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $\varphi = 1$ | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,00 |
| $\lambda = 0$ | 0,23 | 0,56 | 1,04 | 1,78 | 3,00 | 5,25 | 10,0 | 24 | 99 | ∞ |
| $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = 0$ | 0,19 | 0,36 | 0,51 | 0,64 | 0,75 | 0,84 | 0,91 | 0,96 | 0,99 | 1,00 |

Las experiencias de Fliegner (1875), de Archer (1913) y de Davis (1908) no demuestran la constancia absoluta de λ cuando varía la velocidad, sin embargo, la comparación de los resultados de estos experimentadores no es concordante en el sentido

de poder afirmar a la luz de ellas si λ varía en relación directa o inversa de la velocidad, de modo que si no son excesivas las variaciones de la velocidad podremos admitir simplemente la constancia de λ . Esto supone que la vena no se separe bruscamente de las paredes por efecto de desprendimientos de gases disueltos; λ adquiere en este último caso valores enormemente mayores. Esta forma de escurrimiento no depende ya de la forma geométrica de la canalización y λ varía proporcionalmente a la velocidad. La separación de la vena de las paredes se debe al descenso de presión que sufre la vena en las secciones estrechas.

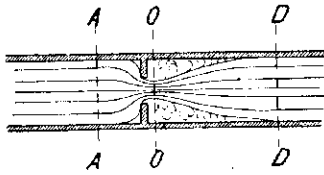


Fig. 61

Si en una disposición cualquiera, por ejemplo la de la Fig. 61, aplicamos el teorema de Bernoulli desde la sección A de presión hidrostática anterior a la singularidad hasta la sección estrecha O, denominando con el sub-índice correspondiente a cada sección a las presiones y velocidades locales, si B_a es en la sección A el Bernoulli descontada la altura de presión atmosférica h_a y si en O la altura de presión

es h_o se tiene:

$$B_a + h_a = \frac{U_o^2}{2g} + h_o$$

de donde:

$$U_o = \sqrt{2g(B_a + h_a - h_o)}$$

El gasto, que en la sección D, posterior a la singularidad, se expresa como siempre por

$$Q = m \Omega_d \sqrt{2gH}$$

siendo H el exceso de Bernoulli de A sobre la cota piezométrica de D y m el coeficiente de gasto, producto de los de velocidad y contracción, también se puede escribir en O:

$$Q = \Omega_o \sqrt{2g(B_a + h_a - h_o)}$$

y por lo tanto se tiene la igualdad:

$$m \Omega_d \sqrt{2gH} = \Omega_o \sqrt{2g(B_a + h_a - h_o)}$$

$$m^2 \frac{\Omega_d^2}{\Omega_o^2} = \frac{B_a + h_a - h_o}{H} \quad (14)$$

Si llamamos h_d la altura de presión sobre la atmósfera que hay en D, obtenemos:

$$H = B_a - h_d$$

y por lo tanto
$$h_o = B_a + h_a - m^2 \frac{\Omega_d^2}{\Omega_o^2} (B_a - h_d) \quad (15)$$

o simplemente reemplazando en la ecuación (14):

$$m^2 \frac{\Omega_d^2}{\Omega_o^2} = \frac{B_a + h_a - h_o}{B_a - h_d} \quad (15 a)$$

La presión h_o teóricamente no puede ser negativa y prácticamente no puede descender de un valor positivo en que a la temperatura del líquido se forman vapores y se desprenden gases disueltos, pues bajando de ese límite no se verifica el escurrimiento a boca llena: la corriente se desprende de las paredes que la rodean.

Con la ecuación (15) se puede encontrar la presión que rodea a la sección menor y determinar, conociendo el valor de h_o con que se desprenden los gases, la carga B_a límite del escurrimiento a boca llena.

En caso de desagüe al aire libre $h_d = 0$ y la (15 a), nos da, por lo tanto:

$$\frac{h_a - h_o}{B_a} = m^2 \frac{\Omega_d^2}{\Omega_o^2} - 1 \quad (15 b)$$

Como en una disposición dada el segundo miembro de la ecuación (15 b), es constante, los aumentos de B_a o sea de H , revelan disminuciones de h_o para mantener la constancia.

Además de cargas menores que el valor especial de B_a , que produce la separación de la vena, es indispensable para el escurrimiento a boca llena una longitud y forma determinadas. No se puede precisar, en rigor, cuál es la menor longitud que asegura el escurrimiento a boca llena, pero se acepta que una longitud 2,5 a 3 veces la mayor dimensión del tubo ensanchado es suficiente para la expansión completa de la vena. Una concicidad de 8° en el vértice alcanza a ser llenada en el desagüe al aire libre, pero continuando la canalización cerrada, un cono de cualquier ángulo se puede llenar.

Son paredes intermedias las comprendidas entre esos límites de 2,5 a 3 veces la mayor dimensión y $\frac{1}{2}$ vez la menor. Son pocos y de pequeña concordancia los estudios experimentales de estas formas intermedias. Parece que la forma de escurrimiento depende mucho de una condición inicial o de la inversión de la vena, de que luego hablaremos.

Es común ver en tubos de gran contracción de entrada o en conos de ángulos superiores a 8° que la vena adherida a las paredes se proyecta al aire en forma de penacho, con un hueco central.

36. Ensanches bruscos y paredes gruesas.—En una canalización cerrada un ensanchamiento brusco significa una rápida disminución de la velocidad de los filetes medios-locales; se puede decir que se produce un choque de la masa más veloz que llega con la menos veloz que le sigue. En realidad, el fenómeno en movimiento turbulento no es sencillo de imaginar, pues no conocemos la forma de las trayectorias en el ensanchamiento de la corriente. Solamente para simplificar es que

hablamos de expansión de filetes exagerando aquí, en exceso, la idea de movimiento medio-local por filetes determinados. Es un hecho experimental indudable que un poco aguas abajo del ensanche toda la sección participa del escurrimiento, por lo tanto se ha verificado la expansión. No sabemos qué forma va tomando la vena

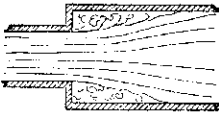


Fig. 62.

en el ensanche, pero es evidente que alrededor de ella queda líquido llamado «muerto», que no participa del escurrimiento general, animado de movimientos giratorios que le comunica la misma vena. Estos torbellinos que rodean la vena absorben energía quitándosela a la corriente y además chocan contra la corriente misma.

Este conjunto de fenómenos, a los que habría que agregar los frotamientos inherentes a todo movimiento, constituyen una pérdida de carga singular de importancia. El cálculo de ella, que puede hacerse aplicando el teorema de las cantidades de movimiento, requiere el conocimiento de las presiones en las caras terminales, es decir, en las secciones vivas, y en el anillo que rodea a la sección viva anterior. Las presiones en Ω_0 y Ω_1 (Fig. 63) pueden aceptarse sencillamente hidrostáticas, puesto que podemos suponer filetes medio-locales paralelos antes y después del ensanche. En el anillo que rodea a la sección Ω_0 el líquido muerto, animado de torbellinos violentos, no nos permite aceptar una hipótesis sencilla de variación de presión, sino en el caso que se acepte también que la velocidad medio-local junto a la pared es nula, aunque la velocidad instantánea no lo sea. Parece además que el sentido de tal velocidad es bien definido, contrariamente a lo que requiere la hipótesis de término medio nulo. La experiencia revela (1) que

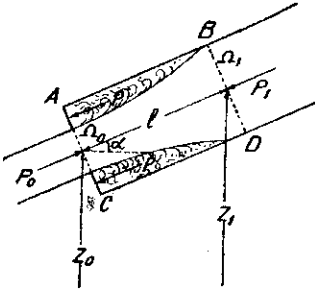


Fig. 63.

la presión en ese anillo es menor que la de Ω_0 y tanto menor cuanto mayores son las velocidades y la razón Ω_1/Ω_0 . Solamente es despreciable la diferencia entre la presión media en el anillo $\Omega_1-\Omega_0$ y la de Ω_0 , en razones Ω_1/Ω_0 menores de 1,45.

Siguiendo la idea de Fliegner, tomaremos en cuenta la presión media en el anillo que rodea a la sección inicial en la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento, como distinta de la hidrostática que reina en Ω_0 y despreciaremos, como este autor y Bélanger, los frotamientos en el corto espacio en que se verifica el ensanche.

Aplicando el teorema citado a la masa líquida encerrada entre A, B, D y C y tomando como eje de proyección un paralelo al eje hidráulico, (Fig. 63) escribiremos que el incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo, proyectado sobre el eje hidráulico, es igual a la proyección de las fuerzas.

En el tiempo dt entra por Ω_0 la masa $\frac{\gamma}{g} \Omega_0 U_0 dt$ y sale por la sección final Ω_1 una masa igual. Esta masa entra con velocidad U_0 y sale con velocidad U_1 , co-

(1) Nos referimos a las medidas hechas por Archer (1911) y Gibson (1908).

munes, por hipótesis, para todas las partículas en cada sección, de modo que el incremento de cantidad de movimiento que ella recibe en la unidad de tiempo vale:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega_o U_o (U_1 - U_o).$$

El resto de la masa líquida encerrada entre las secciones AC y BD permanece entre ellas y como el movimiento es permanente no varía su cantidad de movimiento. Las fuerzas que dan proyecciones son el peso, cuyo componente es $\gamma \Omega_1 l \text{ sen } \alpha$, negativa en la figura, y las presiones en las caras terminales. Si llamamos p_o^1 la presión unitaria que existe en el centro de gravedad de Ω_o , $H p_1$ la de Ω_1 y p el término medio de la reacción en el anillo $\Omega_1 - \Omega_o$, que rodea a Ω_o , notando que la hipótesis de frotamientos nulos nos lleva a presiones normales al eje de proyección en la envoltura cilíndrica, el teorema dice:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega_1 U_1 (U_1 - U_o) = \gamma \Omega_1 l \text{ sen } \alpha + p_o \Omega_o - p_1 \Omega_1 + p (\Omega_1 - \Omega_o).$$

Notando que $-l \text{ sen } \alpha = z_o - z_1$, cotas de dos puntos homólogos de Ω_o y Ω_1 , como los centros de gravedad, por ejemplo, dividiendo por Ω_1 y γ , se tiene:

$$\frac{U_1}{g} (U_1 - U_o) = z_o - z_1 + \frac{p_o}{\gamma} \frac{\Omega_o}{\Omega_1} - \frac{p_1}{\gamma} + \frac{p}{\gamma} \left(1 - \frac{\Omega_o}{\Omega_1}\right)$$

En el caso que $p = p_o$ se tiene:

$$\frac{U_1}{g} (U_1 - U_o) = z_o + \frac{p_o}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma} \quad (16)$$

El segundo miembro es la diferencia de cotas piezométricas y como U_1 es siempre menor que U_o , quiere decir que la cota piezométrica final es siempre mayor que la inicial.

Agregando a ambos miembros $\frac{U_o^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}$ se obtiene en el segundo la diferencia entre las sumas de Bernoulli antes y después del ensanche, es decir, la pérdida de carga. Por lo tanto:

$$\Delta = \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_1 U_o}{g} + \frac{U_o^2}{g} + \frac{U_o^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{(U_o - U_1)^2}{2g} \quad (17)$$

que es la expresión dada por Borda en 1766, expresando que la pérdida de carga es igual a la *altura de velocidad perdida*, asimilando el fenómeno que nos ocupa al choque de cuerpos sólidos. Bélanger (1840) expone la teoría anterior suponiendo que la presión varía en toda la cara anterior Ω_o más el anillo circunvecino, hidrostáticamente; lo que equivale a la suposición $p = p_o$ como lo hemos hecho, pues indica

que la presión media o única, en el anillo es la correspondiente al centro de gravedad de él, que coincide con el de Ω_0 .

Razonando en forma análoga a la anterior, pero tomando el teorema de las cantidades de movimiento con p distinto de p_0 se llega a:

$$\Delta = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \frac{p_0 - p}{\gamma} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}\right) \quad (18)$$

Como se ha dicho, p es menor que p_0 y por lo tanto la pérdida de carga dada por esta expresión es mayor que la dada por la fórmula sencilla de Borda. Por otro lado, si se considera que los frotamientos entre el líquido llamado muerto y la pared, dado el sentido de rotación del torbellino tienen el mismo sentido que el escurrimiento, habría que agregar un término negativo que los tome en cuenta y que tendería a compensar en esta ecuación, el exceso sobre la fórmula de Borda que da la presión p menor que p_0 . En el estado actual de la experimentación y siguiendo a Gibson (1908) no vale la pena complicar la expresión sencilla de Borda con otros términos de dudosa exactitud. Se puede aceptar, sin grave error, que la expresión sencilla de Borda (17), está confirmada por la experiencia, aceptando la ecuación de la pérdida de carga:

$$\Delta = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$$

Como el movimiento es permanente se tiene: $U_0 = U_1 \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$ y $U_1 = U_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$; valores que al ser reemplazados en la fórmula anterior nos dan:

$$\Delta = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{U_0^2}{2g} \quad (19a)$$

y

$$\Delta = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2 \frac{U_1^2}{2g} \quad (19b)$$

Los factores de resistencia de la expresión de Borda son entonces:

$$\lambda_0 = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1} - 1\right)^2 \quad (19c)$$

en alturas de velocidad inicial, y

$$\lambda_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2 \quad (19d)$$

en alturas de velocidad final.

La fórmula de Borda fué confirmada por los antiguos experimentadores Weis-

bach y Fliegner y los modernos Brightmore (1907), Gibson (1908) y Schütt (1926) (1). Ha sido, sin embargo, corregida por Saint-Venant (1846) para tomar en cuenta los frotamientos y las desigualdades de velocidad agregando un coeficiente constante:

$$\Delta = \left(\frac{U_o - U_1}{2g} \right)^2 + \frac{l}{9} \frac{U_1^2}{2g} \quad (20)$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^2 + \frac{l}{9} \quad (20a)$$

Posteriormente Bousinesq, por consideraciones analíticas, indicó:

$$\lambda_1 = 1,11 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^2 \quad (21)$$

Después Archer (1913) propone, como resultado de sus experiencias sobre ensanches con tubos finales hasta de 7,5 cm. y descontando frotamientos:

$$\Delta = \frac{(U_o - U_1)^{1,92}}{2g} \quad (23)$$

de la cual se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{l}{U_1^{0,081}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^{1,92} \quad (23a)$$

Si las pérdidas son pequeñas, ya sea porque las velocidades lo son o porque la razón Ω_1/Ω_o es poco diferente de uno, esta fórmula da coeficientes mayores que los de Borda. (En experiencias hechas llegaron a valer 1,225 λ de Borda). Por el contrario, si las pérdidas son grandes, sus coeficientes son menores que aquellos. (En experiencias en que U alcanzó a 10 m/seg. y Ω_1/Ω_o a 10, la razón entre estos coeficientes llegó a 0,825).

Archer considera que Gibson tomó la presión final muy cerca del plano del ensanche y en consecuencia discute sus medidas.

En vista de estos resultados, no concluyentes, no se ve la ventaja en abandonar la fórmula, mucho más sencilla (17, de Borda, cuyos resultados son intermedios entre los propuestos).

Según Archer, la distancia l en que los filetes vuelven a ser paralelos, comprimiendo toda la sección, es dada por la expresión:

$$l = 1,92 (d_1 - d_o)^{0,4} \quad (24)$$

en que d_o y d_1 son los diámetros anterior y posterior del ensanche. La expresión (24, da los siguientes resultados numéricos:

(1) Instituto Hidráulico de la Escuela Politécnica de Munich, bajo la dirección de Thoma.

$$\begin{array}{rcccl} d_1 - d_0 = & 0,025 & 0,050 & 0,10 & \text{mts.} \\ l = & 0,45 & 0,55 & 0,77 & \text{,} \end{array}$$

Como se dijo, la cota piezométrica posterior al ensanche es mayor que la anterior a él. En disposiciones horizontales se confunden con las alturas de presión; luego, si la posterior es atmosférica la anterior será negativa. En este principio están fundados unos cuantos aparatos industriales.

Tal conclusión explica también el resultado de las experiencias de Hachette y Buff, que demostraron que en el escurrimiento que desagua en el vacío no influye la agregación de un tubo adicional. Esto se debe a que es imposible que la vena, después de contraída, se ensanche hasta las paredes, pues en estas condiciones las presiones que rodearían a la vena contraída serían menores que el vacío absoluto.

El coeficiente $m^2 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}$ de la ecuación (15a ó (15b), puede variar en el caso de ensanches bruscos, sin contracción final, de 1 a 2. El máximo 2 corresponde a la razón $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 2$ (1). La raíz de este coeficiente, $m \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$, que llamaremos M , es la razón entre el gasto efectivo y el que hubiera habido sin ensanche; si ambos desagües se suponen a la misma presión final; pues, evidentemente se puede escribir:

$$M = \frac{m \Omega_1 \sqrt{2gH}}{\Omega_0 \sqrt{2gH}} = m \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

M , si se prescinde de frotamientos, pasará por el máximo para la misma razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2$. Su valor máximo será: $\sqrt{2} = 1,41$. (2).

Especial interés tiene el cálculo de los coeficientes de velocidad y gasto de los tubos cortos de 3 diámetros de longitud, que se llenan y desaguan al aire libre,

(1) En efecto, en ensanche brusco de sección inicial Ω_0 y final Ω_1 el coeficiente de gasto, si se prescinde de frotamientos, es:

$$m = \frac{l}{\sqrt{l + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2}}$$

Poniendo $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = n$ y prescindiendo de los frotamientos

$$m^2 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} = \frac{n^2}{n^2 - 2n + 2}$$

cuyo máximo, obtenido haciendo nula la derivada, corresponde a $n = 2$. Si no se prescinde de los frotamientos y se supone que $\lambda_f = 0,096$ (valor que se justifica en este mismo párrafo, a continuación), el máximo de M^2 es 1,92 y corresponde a $n = 2,096$.

(2) Tomados en cuenta los frotamientos el máximo es $M = \sqrt{1,92} = 1,385$ y es superior a la unidad siempre que $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ sea mayor que 1,048.

sin contracción final, con cualquiera disposición de entrada. Entre éstos caen las *paredes gruesas* y los tubos entrantes más largos que el de Borda. Además de la pérdida de entrada debida al ensanche hay que considerar en ellos los frotamientos que en los 3 diámetros valen:

$$\Delta_f = \frac{4 b U^2}{D} 3 D = 24 g b \frac{U^2}{2g} \quad (26)$$

el coeficiente de resistencia λ_f , debido a los frotamientos es, pues:

$$\lambda_f = 24 g b \quad (27)$$

Tomando $b = 0,0004$, apto para tubos pequeños lisos, resulta:

$$\lambda_f = 0,096 \quad (27a)$$

El coeficiente de gasto, siendo λ_e la pérdida de ensanche, vale:

$$m = \varphi \frac{l}{\sqrt{l + 0,096 + \lambda_e}} \quad (28)$$

El valor λ_e queda dado por la expresión de Borda que escribiremos:

$$\lambda_e = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - l \right)^2$$

en que Ω es la sección final y Ω_c la de la vena antes del ensanche. Se acepta, generalmente, que *en tubos cerrados las contracciones de entrada son iguales a las que se verifican al aire libre*. Esta afirmación se basa en que los cálculos que las suponen son en general confirmados por la experiencia. Según esto, se calcula la contracción de entrada en una disposición cualquiera, por los procedimientos indicados anteriormente en los orificios de pared delgada, ya sea contracción completa, imperfecta o suprimida. Si llamamos μ a la razón Ω_c/Ω_o , (Ω_c es la sección de la vena contraída y Ω_o la de entrada (fig. 64), podemos escribir: $\Omega_c = \mu \Omega_o$. En el ensanche la pérdida será:

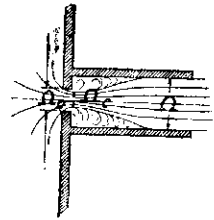


Fig. 64.

$$\Lambda = \left(\frac{\Omega}{\mu \Omega_o} - l \right)^2 \frac{U^2}{2g} \quad (29)$$

es decir, que el factor de resistencia del ensanche vale

$$\lambda_e = \left(\frac{\Omega}{\mu \Omega_o} - l \right)^2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - l \right)^2$$

A continuación va un cuadro de valores de λ_f , λ_e , $\Sigma\lambda$, m , M y $\frac{h_a-h_o}{H}$, en tubos de esta especie. Se parte con los valores de $\frac{\Omega_c}{\Omega}$ (1), razón que habría que dividir por μ para tener la relación $\frac{\Omega_o}{\Omega}$ entre la sección de entrada de la disposición y la sección final. El coeficiente μ que en la práctica puede variar de 0,5 a 1 se calcula como se ha indicado por los procedimientos de las paredes delgadas.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| $\frac{\Omega_c}{\Omega}$ | λ | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.62 | 0.60 | 0.52 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0 |
| λ_f | | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | 0.096 | — |
| λ_e | | 0 | 0.012 | 0.063 | 0.183 | 0.410 | 0.444 | 0.852 | 1.00 | 2.25 | 5.44 | 16 | 81 ∞ |
| $\Sigma\lambda$ | | 0.096 | 0.108 | 0.159 | 0.279 | 0.506 | 0.540 | 0.948 | 1.096 | 2.346 | 5.538 | 16.1 | 81.1 ∞ |
| m | | 0.956 | 0.951 | 0.929 | 0.884 | 0.830 | 0.808 | 0.717 | 0.691 | 0.547 | 0.390 | 0.242 | 0.109 0 |
| M | | 0.956 | 1.056 | 1.162 | 1.263 | 1.314 | 1.347 | 1.379 | 1.382 | 1.368 | 1.30 | 1.21 | 1.20 1 |
| $\frac{h_a-h_o}{H}$ | | 0.090 | 0.115 | 0.360 | 0.600 | 0.740 | 0.825 | 0.900 | 0.92 | 0.89 | 0.70 | 0.47 | 0.44 0 |

Los resultados de estos cuadros aparecen dibujados en el gráfico de la Fig. 65.

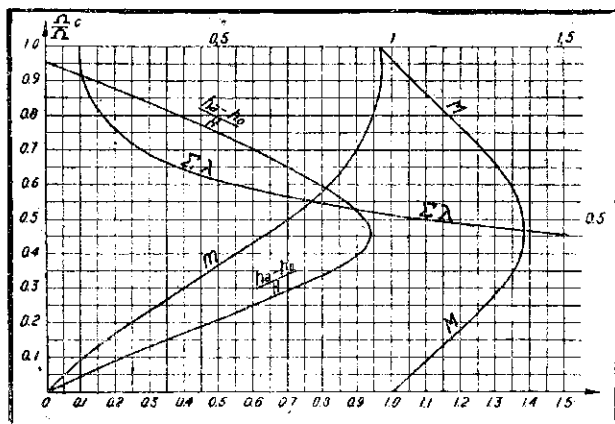


Fig. 65

Según este cuadro, la pérdida de entrada en una pared gruesa

$$\left(\frac{\Omega_c}{\Omega} = \frac{\Omega_o}{\Omega_i} = 0,6 \text{ a } 0,62\right),$$

vale: $\Sigma\lambda = 0,50$ a $0,54$. En números redondos se acepta $\Sigma\lambda = 0,5$. El coeficiente de gasto resulta $m = 0,808$ a $0,815$ como en realidad se verifica.

En un tubo entrante que se llena $\Sigma\lambda = 0,948$ a $1,096$; en término medio $\Sigma\lambda = 1$ y

$m = 0,70$ como sucede en la práctica.

(1) La razón $\frac{\Omega_c}{\Omega}$ adoptada para el cuadro resulta más lógica que la inversa $\frac{\Omega}{\Omega_c}$ que aparece en las fórmulas, pues aquella varía solamente entre 0 y 1 y esta entre ∞ y 1. Es evidente, que si no hay contracción de entrada $\mu = 1$ y por lo tanto $\frac{\Omega_c}{\Omega} = \frac{\Omega_o}{\Omega}$.

Igualmente, Venturi encontró al experimentar tubos cortos de coeficiente de contracción de entrada $\frac{\Omega_o}{\Omega_1} = 0,625$, dispuestos como indica la Fig. 66, que el agua subía por el tubo A a $0,744 H$, valor que comprueba el gráfico de la Fig. 65, pues ese es precisamente el valor de $h_a - h_o$.

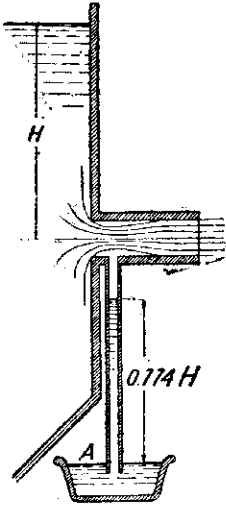


Fig. 66.

Si un orificio de pared gruesa forma ángulo entre la dirección de la vena y la normal a la pared interior del estanque (fig. 67), el coeficiente de gasto disminuye. Esa disminución se puede computar aceptando, según las experiencias de Weisbach que m disminuye en $0,0015$ por cada grado centígrado, corrección que vale hasta 60° .

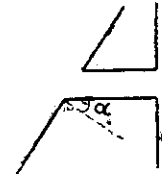


Fig. 67.

Respecto a las paredes intermedias sólo se tienen las experiencias de Poleno (1718) y Stewart (1908), poco numerosas y que en líneas generales coinciden. Se puede aceptar, partiendo de la pared gruesa $m = 0,81$ y la delgada $m = 0,60$; los siguientes coeficientes, funciones de la razón l/D entre la longitud del tubo

y el diámetro de él; notando que la pared es gruesa cuando $\frac{l}{D}$ es superior a 3:

| | | | | | | |
|-----------------|------|------|------|------|------|-------------|
| $\frac{l}{D} =$ | 3 | 2,5 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 y menos |
| $m =$ | 0,81 | 0,80 | 0,79 | 0,78 | 0,75 | 0,60 |

Los resultados anteriores suponen completa la contracción de entrada, pues en caso diverso los resultados experimentales que se poseen son anómalos e incompletos.

En las llaves comúnmente usadas se verifica una pérdida de carga por ensanchamiento brusco, de modo que su cálculo obedecería simplemente a las normas recientemente dadas; sin embargo, las formas de la canalización varía en cada abertura y da una contracción y ensanche que es variable con la abertura, de manera que es difícil conocer con alguna aproximación la forma y dimensiones efectivas de la corriente en toda la zona en que está situada la llave. Por esta razón es preferible en la práctica tomar directamente los coeficientes de pérdida de carga, de contracción y de gasto que corresponden a las distintas aberturas de las llaves. A continuación

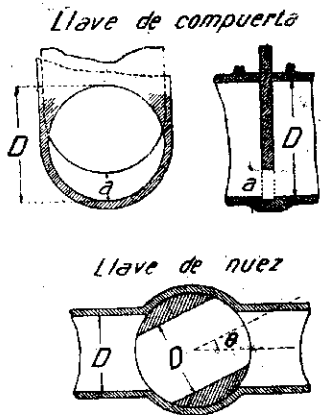


Fig. 68

van los coeficientes debidos a las experiencias de Weisbach (1) en los dos tipos de llaves, que son las más comunes en grandes dimensiones; las designaciones aparecen en la figura 68.

a) LLAVE DE COMPUERTA

| $\frac{a}{D} =$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{8}$ |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\lambda =$ | 89,1 | 17 | 7,6 | 2,09 | 0,81 | 0,26 | 0,07 | 0,00 |
| $\mu =$ | 0,60 | 0,62 | 0,635 | 0,67 | 0,707 | 0,776 | 0,833 | 1,00 |
| $m =$ | 0,106 | 0,206 | 0,341 | 0,567 | 0,743 | 0,890 | 0,965 | 1,00 |

b) LLAVE DE NUEZ

| Angulo $\theta =$ | 82° | 65° | 60° | 55° | 50° | 45° | 40° | 35° | 30° | 25° | 20° | 15° | 10° | 5° | 0° |
|-------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $\lambda =$ | ∞ | 486 | 206 | 106 | 57 | 31,2 | 17,3 | 9,68 | 5,49 | 3,10 | 1,56 | 0,75 | 0,29 | 0,05 | 0 |
| $\mu =$ | 0 | 0,484 | 0,464 | 0,460 | 0,468 | 0,484 | 0,506 | 0,53 | 0,544 | 0,594 | 0,646 | 0,698 | 0,767 | 0,862 | 1 |
| $m =$ | 0 | 0,045 | 0,07 | 0,10 | 0,138 | 0,176 | 0,234 | 0,307 | 0,390 | 0,496 | 0,625 | 0,760 | 0,88 | 0,98 | 1 |

Los coeficientes λ , μ y m se refieren a la sección de salida de la llave, es decir, a la de la cañería en que van introducidas. Siempre al comenzar la abertura de una llave se nota un ruido especial debido al desprendimiento de gases que corresponde al gran estrangulamiento de la vena líquida.

EJEMPLO.—Una cañería horizontal arranca de un estanque. Se compone de 3 trozos; el primero de 0,65m. de longitud y los otros dos de 1 m. de largo cada uno; el primero de 0,10 m. de diámetro, de 0,15 el segundo y de 0,20 m. el tercero. El paso de un trozo a otro se hace por medio de un ensanche brusco. La altura del agua en el estanque, contada sobre el plano horizontal que pasa por el eje de la cañería es de 0,80 m. Se pide: a)—calcular el gasto que escurre si el

desagüe es el aire libre, y b)—trazar el plano de carga y el de cotas piezométricas de toda la cañería. Los frotamientos se tomarán en cuenta aceptando que por ellos se pierde una altura de velocidad cada 30 diámetros corridos de cañería.

Para resolver este problema es útil ordenar los cálculos haciéndolos por medio de cuadros. En el esquema de la Fig. 69 se han indicado los puntos que limitan

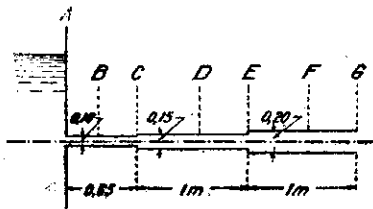


Fig. 69

trozos interesantes en la cañería del ejemplo. Los puntos B, D y F son los que

(1) Han sido corregidas ciertas anomalías que se notan en las experiencias. Las llaves de compuerta de sección rectangular que experimentó Weisbach, caen entre los orificios de contracción suprimida en los lados y en el fondo, seguidos por un ensanche brusco.

determinan el fin de la pérdida de ensanche brusco que ocasionan los aumentos de diámetro. Los ensanches bruscos se verifican, en consecuencia, entre A y B, entre C y D y entre E y F. En los trozos restantes solamente existe pérdida de carga de frotamientos. Las longitudes CD y EF se han determinado por la fórmula empírica (24, de Archer y la AB, donde hay un ensanche de reacción, se la supone igual a tres diámetros. En el primer cuadro, que va a continuación, la tercera columna da la relación entre la velocidad que corresponde al trozo y la final, que es la razón inversa de los cuadrados de los diámetros. La cuarta da las razones de las alturas de velocidad, razones que valen los cuadrados de la tercera columna. La columna quinta es el coeficiente de resistencia en función de la altura de velocidad final del trozo. Los ensanches bruscos han sido calculados por la fórmula de Borda, $\lambda = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$, y los frotamientos, por medio de la expresión: $\lambda = \frac{l}{30d}$, en que l es la longitud del trozo y d su diámetro y que obedece a la hipótesis hecha de perder una altura de velocidad cada 30 diámetros.

| Trozo | longitud m. | $\frac{U_G}{U_{local}}$ | $\frac{U_G^2}{U_{local}^2}$ | λ_{local} | λ_G |
|---------------------------|-------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------|-------------|
| AB | 0,30 | 4,0 | 16,00 | 0,5 | 8,000 |
| BC | 0,35 | 4,0 | 16,00 | 0,233 | 1,866 |
| CD | 0,55 | 1,777 | 3,145 | 1,56 | 4,906 |
| DE | 0,45 | 1,777 | 3,145 | 0,10 | 0,315 |
| EF | 0,55 | 1,0 | 1,00 | 0,60 | 0,600 |
| FG | 0,45 | 1,0 | 1,00 | 0,075 | 0,075 |
| $\Sigma \lambda = 15,762$ | | | | | |

El Bernoulli de G, sobre el plano horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección, se reduce a la altura de velocidad; aplicando el teorema de Bernoulli generalizado entre A y G se obtiene la ecuación:

$$0,80 = \frac{U_G}{2g} (1 + \Sigma \lambda) = 16,762 \frac{U_G^2}{2g}$$

por lo tanto, la altura de velocidad en G vale: $\frac{U_G^2}{2g} = \frac{0,80}{16,762} = 0,0477$ m. La velocidad correspondiente es $U_G = 0,966$ m/s; como la sección en G es $\Omega_G = 0,0314$ m², el gasto vale: $Q = 0,0314 \times 0,97 = 0,030$ m³/s.

El cálculo del plano de carga y el de cotas piezométricas va hecho en el cua-

dro siguiente, que requiere poca explicación. Las alturas de velocidad se obtienen multiplicando la altura de velocidad final 0,0477 m. por la razón $\frac{U_G^2}{U^2}$, dada en el cuadro anterior. Los Bernoulli son la suma de la pérdida de carga del trozo anterior con el Bernoulli del punto anterior. La pérdida de carga va calculada en la columna 3.ª La altura de presión es la diferencia entre el Bernoulli y la altura de

| Punto | $\frac{U^2}{2g}$ | Δ del trozo anterior | Bernoulli | $\frac{p}{\gamma}$ |
|-------|------------------|--------------------------------|-----------|--------------------|
| G | 0,0477 | | 0,0477 | 0,00 |
| F | 0,0477 | $0,075 \times 0,0477 = 0,0036$ | 0,0513 | + 0,0036 |
| E | 0,1500 | $0,60 \times 0,0477 = 0,0286$ | 0,0799 | - 0,0701 |
| D | 0,1500 | $0,315 \times 0,0477 = 0,0150$ | 0,0949 | - 0,0551 |
| C | 0,7635 | $4,906 \times 0,0477 = 0,2341$ | 0,3290 | - 0,4345 |
| B | 0,7635 | $1,866 \times 0,0477 = 0,0891$ | 0,4181 | - 0,3454 |
| A | 0,7635 | $8,00 \times 0,0477 = 0,3818$ | 0,7999 | + 0,0364 |

velocidad; los valores negativos significan alturas de presión inferiores a la atmosférica.

En la columna de los Bernoulli, renglón A del último cuadro se lee 0,7999, en vez de 0,800. La pequeñísima diferencia es debida a los decimales despreciados en los cálculos.

Se ha colocado (fig. 69 a) entre A y B el punto A_1 ; en esta sección se encuentra la vena contraída de entrada. La distancia AA_1 es de medio diámetro, es decir, 0,05 m. En A_1 el coeficiente de contracción es 0,60 y por lo tanto la altura de velocidad vale: $\frac{U_{A_1}^2}{2g} \frac{1}{0,60^2} = \frac{0,7635}{0,36} = 2,121$ m. Como en A_1 el Bernoulli es igual al de A, la altura de presión vale:

$$\frac{p}{\gamma} = 0,80 - 2,121 = -1,321 \text{ m.}$$

También es digno de observarse que en la sección de la pared del estanque, A, en que arranca la cañería, la cota piezométrica vale dentro del tubo, según el último cuadro 0,0364 m, y en la misma sección A, pero considerando dentro del estanque, vale 0,80 m, de modo que hay dos valores.

En el gráfico de la figura 69a aparecen trazados los planos planos de carga y de cotas piezométricas.

35. Boquillas y conos.—Vamos a designar bajo la denominación de *boquillas* todas las disposiciones de contorno cerrado en que no hay contracción final ni contracción de entrada y en que los frotamientos son los únicos que absorben alguna parte de la energía.

En el caso anterior hemos visto que si $\Omega/\Omega_0 = 1$ y $\lambda_f = 0,096$, se tenía $m = 0,956$. Este es el coeficiente medio de las boquillas.

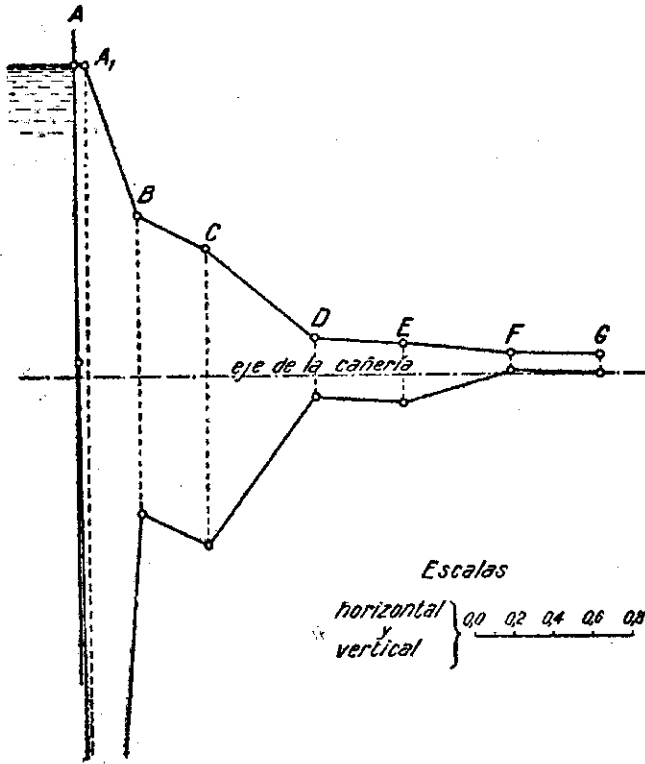


Fig. 69 a

Las boquillas más usadas son las de la rueda Pelton y las contra incendios (Fig. 70). Las del primer tipo poseen un vástago o alma cuyo objeto es regular el gasto de salida, cerrando o abriendo la abertura final por medio de un avance o retroceso. El efecto que produce este vástago de forma bien concebida, es estratificar completamente la corriente, disminuyendo mucho λ_f , que ha llegado a descender al valor $\lambda_f = 0,03$, que da $m = 0,975$.

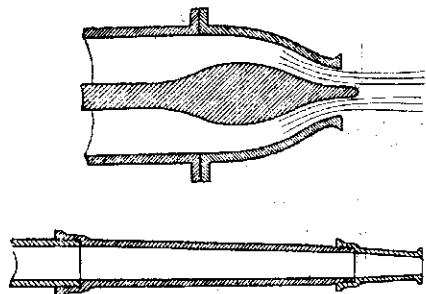


Fig. 70

Se han experimentado muchos tubos cilíndricos y cónicos biselados y redondeados en la entrada, que son formas intermedias y pueden catalogarse entre las boquillas. En estas formas se nota, co-

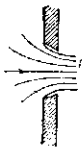


Fig. 70a.

mo se ha dicho, la gran influencia de los redondeos que, por rudimentarios que sean, disminuyen mucho la contracción y aumentan el coeficiente de gasto (Fig. 70a).

Se llaman *conos* en Hidráulica a las canalizaciones de contorno cerrado en que la sección va creciendo o decreciendo paulatinamente; de modo que esta denominación comprende, además de los conos propiamente tales, a los troncos de pirámides, tubos en forma de trompeta, etc. Si no hacemos referencia especial a estas últimas disposiciones, nos referiremos en lo que sigue, únicamente a los conos propiamente tales.

El fenómeno principal que se verifica en un cono es la transformación de una forma de energía en otra, o sea, la disminución de uno de los sumandos del teorema de Bernoulli y aumento de otro. Así, en los conos convergentes disminuye en general la cota piezométrica y aumenta la altura de velocidad. Lo contrario sucede en los conos divergentes. Si no hubiera pérdida de carga dentro de estas disposiciones, el aumento de una de estas formas de energía sería exactamente igual a la disminución de la otra, lo que no sucede en la práctica porque existen dichas pérdidas. En las aplicaciones de la Hidráulica son usados los conos precisamente por esta transformación de energía.

Los *conos convergentes* están en general afectados de una pérdida de entrada y contracción de salida. La pérdida de entrada tiende a disminuir el coeficiente φ de velocidad. La contracción final, que afecta al coeficiente μ , depende solamente del ángulo siempre que la longitud sea suficiente para que se perfeccione el ensanche que sigue a la perturbación de entrada, lo que ocurre si ella es mayor de 3 veces el diámetro de salida. En los conos convergentes hay que considerar, además de la pérdida de entrada, los frotamientos que, en general, son distintos de los existentes en los tubos cilíndricos.

En los conos convergentes, al acelerarse la corriente, tienden a desaparecer los frotamientos interiores por la igualación de la velocidad; sube en consecuencia la velocidad crítica de turbulencia, llegando hasta hacerse 60 veces mayor que la de los tubos cilíndricos, y, por lo tanto, se presenta fácilmente la estratificación de los filetes.

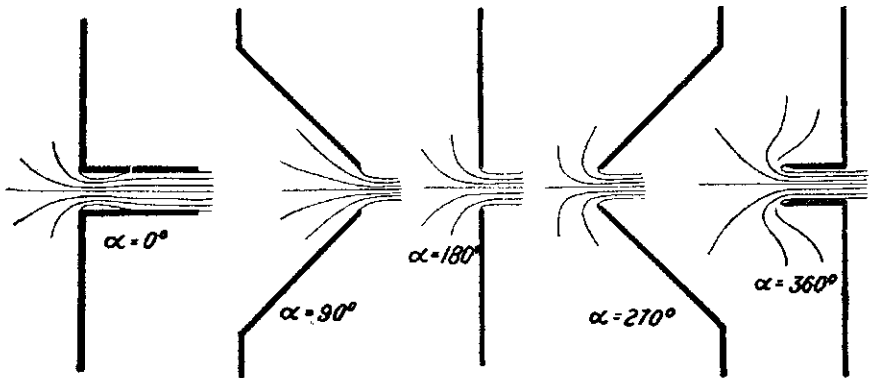


Fig. 71

El ángulo que lo define es el ángulo al vértice del cono. Así, la pared gruesa equivale a $\alpha = 0^\circ$, la plana a $\alpha = 180^\circ$ y el tubo entrante de Borda a $\alpha = 360^\circ$ (Fig. 71).

Se puede calcular el coeficiente φ de velocidad, evaluando las pérdidas de carga. En efecto, la pérdida por frotamientos, calculada por la fórmula general, por unidad de longitud, en un punto que dista x de la salida, con las notaciones de la Fig. 72, es;

$$J = \frac{4 b U_x^2}{D_x}$$

como $D_x = D + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, podemos poner U_x en función de la velocidad final U :

$$U_x = U \frac{D^2}{D_x^2} = \frac{U D^2}{\left(D + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

La pérdida de carga por frotamientos en todo el cono de longitud l , haciendo los reemplazos anteriores es;

$$\Sigma \Lambda = \int_0^l J dx = 4 b U^2 D^4 \int_0^l \frac{dx}{\left(D + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4}$$

$$\Lambda_f = \frac{b U^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[l - \frac{D^4}{\left(D + 2l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} \right] \quad (30)$$

Notando que el diámetro de entrada es $D_o = D + 2l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ multiplicando y dividiendo por $2g$, se tendrá el factor de resistencia debido a los frotamientos:

$$\lambda_f = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(l - \frac{D^4}{D_o^4} \right) \quad (31)$$

Además de los frotamientos puede existir la pérdida de entrada, que estimada en $0,5 U_o^2/2g$, en función de la altura final es:

$$\Delta_e = 0,5 \frac{D^4}{\left(D + 2l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} \frac{U^2}{2g} \quad (32)$$

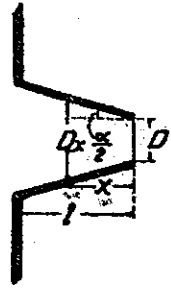


Fig. 72

El factor de resistencia de esta pérdida es, pues, si es completa:

$$\lambda_e = 0,5 \frac{D^4}{\left(D + 2l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} = \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4} \quad (33)$$

El factor de pérdida de carga total, suma de $\lambda_f + \lambda_e$, en función de la velocidad final, es:

$$\lambda = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4}\right) + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4} \quad (34)$$

$$\lambda = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2}\right) + \lambda_{e-o} \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2} \quad (34a)$$

Dando al coeficiente b el valor adecuado $0,0004$, se puede escribir el coeficiente de velocidad:

$$\varphi = \frac{l}{\sqrt{1 + \Sigma \lambda}} = \frac{l}{\sqrt{1 + \frac{0,004}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4}\right) + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4}}} \quad (35)$$

Para cada ángulo, siempre que el diámetro de entrada sea 3 veces mayor que el final, esta expresión de φ da un valor prácticamente constante (1), que va a continuación (2):

(1) El coeficiente φ , dependiendo de la razón de diámetros terminales es variable, pero esta razón a la 4.ª potencia hace muy pequeña su influencia en la fórmula cuando es mayor de 2,5, lo que sucede en conos largos de pequeño ángulo o de 3 diámetros de longitud si son mayores de 16° los coeficientes calculados corresponden a $\frac{D_o}{D} = 2,5$.

(2) Para el ángulo $\alpha = 0^\circ$ la razón D/D_o vale uno, el segundo término del radical es aparentemente indeterminado: $0 \times \frac{0,004}{0}$, pero en realidad vale $0,008 \frac{l}{D}$. En efecto poniendo en vez de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ su valor en función de los diámetros terminales y de la longitud l del cono, $\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{D_o - D}{2l}\right)$ se obtiene, para el denominador de la ecuación (35):

$$1 + \frac{0,008 l}{D_o - D} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4}\right) + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4} = \frac{0,008 l}{D_o^4} \frac{D_o^4 - D^4}{D_o - D} + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4}$$

| | | | | | | | | | | |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\alpha =$ | 0° | 1° | 3° | 5° | 10° | 20° | 30° | 60° | 90° | 180° |
| $\varphi =$ | 0,815 | 0,826 | 0,926 | 0,958 | 0,976 | 0,984 | 0,987 | 0,99 | 0,992 | 1 |

Según esto, se puede decir que en conos de más de 3 diámetros finales de longitud, se puede prescindir de la relación de los diámetros de las secciones y que especialmente en ángulos chicos (menores de 20°) en que se puede tomar simplemente el ángulo por la tangente, se puede aceptar para φ el valor sencillo:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0,008}{\alpha}}} \quad (36)$$

que da los siguientes valores:

| | | | | | |
|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| $\alpha =$ | 1° | 3° | 5° | 10° | 20° |
| $\varphi =$ | 0,825 | 0,927 | 0,957 | 0,980 | 0,990 |

Estos resultados son confirmados por la experimentación que no ha sido, desgraciadamente, ni metódica ni suficiente. En ángulos mayores de 60° el coeficiente de velocidad es prácticamente la unidad.

Respecto del coeficiente μ de contracción, nada analítico ha podido establecerse hasta hoy día. Su determinación es netamente experimental.

El valor de μ , que para el cono de 0° es la unidad (pared gruesa o tubo cilíndrico) disminuye lentamente, pasando por $\mu = 0,60$ en los 180° (pared plana delgada) y bajando hasta $\mu = 0,50$ ó $0,51$ en el cono de 360° (tubo entrante de Borda). A continuación van los valores experimentales encontrados por Castel (1838), Heinemann (1872) y Weisbach (1845):

| | | | | | | | | | |
|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $\alpha =$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 45° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| $\mu =$ | 1,00 | 0,99 | 0,95 | 0,92 | 0,88 | 0,74 | 0,60 | 0,55 | 0,51 |

La variación del coeficiente de gasto m con el ángulo, recordando que es el producto de los de velocidad y contracción, es el siguiente: en tubos en que existe pérdida de entrada dado el rápido crecimiento de φ y la poca variación de μ en ángulos pequeños, debe crecer desde 0,81, que vale en el cono de 0° , pasando por

$$1 + \frac{0,008 l}{D_0^4} (D_0^3 + D_0^2 D + D_0 D^2 + D^3) + \lambda_{e-0} \frac{D^4}{D_0^4}$$

para el caso de $\alpha = 0$, los diámetros son iguales, y se tendrá

$$1 + \frac{0,032 l}{D} + \lambda_{e-0}$$

valor que puesto en la ecuación (34, aceptando un tubo de 3 diámetros de longitud, ($l = 3D$), daría

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,096 + \lambda_{e-0}}}$$

que es precisamente la fórmula (28, del párrafo anterior.

un máximo y bajando después hasta 0,60 en los 180° y a 0,51 en el cono de 360°. El máximo experimental (y aun calculando los φ como se indicó), se verifica para $\alpha=13^\circ$. El valor experimental del máximo es $m=0,95$. Tomando el valor de φ calculado, correspondiente a $\alpha=13^\circ$ que es $\varphi=0,985$ y multiplicándolo por el μ experimental correspondiente al mismo ángulo, que es $\mu=0,98$, se habría obtenido $m=0,965$

En los conos de entrada redondeada o en aquellos cuyo diámetro de entrada es igual al de una cañería que lo antecede, se impide la contracción y la pérdida de entrada, y por lo tanto el coeficiente φ vale 0,96, como en las boquillas. Como μ , en conos de muy pequeño ángulo es prácticamente la unidad, el coeficiente de gasto es prácticamente constante desde 0° hasta 13° y vale $m=0,96$ (línea punteada en la Fig. 73, en que se han dibujado estos valores).

En estos conos sin pérdida de entrada, de longitud mayor de 3 diámetros finales y cuyo ángulo es mayor de 15°, el coeficiente de gasto tiene el mismo valor que en los que tienen dicha pérdida, pues ésta se hace despreciable en ellos, como se

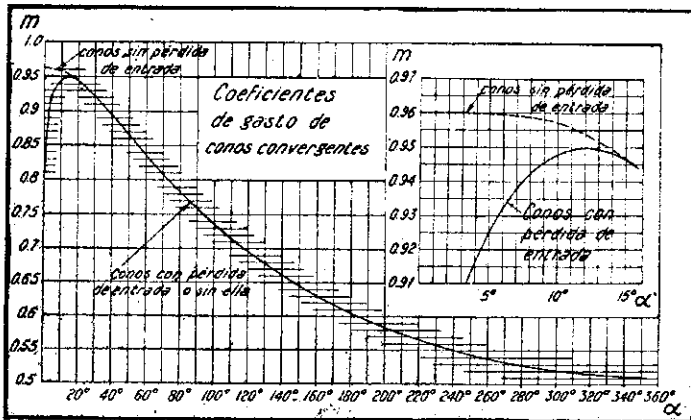


Fig. 73

deduce de lo dicho al hablar del coeficiente φ , (1). En el gráfico de la figura 73 se resumen los coeficientes experimentales de gasto de los conos convergentes.

(1) Para conos sin pérdida de entrada ha dado Zeuner (1856), una fórmula del coeficiente de gasto, que es:

$$m = 0,6385 + 0,2121 \cos^3 \frac{\alpha}{2} + 0,1065 \cos^4 \frac{\alpha}{2}$$

que da los siguientes valores:

| | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha =$ | 0° | 11° | 30° | 45° | 90° | 135° | 180° | 270° | 360° |
| $m =$ | 0,957 | 0,952 | 0,918 | 0,883 | 0,737 | 0,716 | 0,639 | 0,591 | 0,553 |

esta «escala de contracción» de Zeuner coincide bien con el gráfico de la figura 73. Sin embargo, en los ángulos menores de 50°, son algo inferiores hasta 120° y superiores en todos los demás, pues suponen en la pared delgada ($\alpha=180^\circ$) $m=0,64$ y en el tubo de Borda $m=0,53$, lo que sucede en cargas muy pequeñas en $\alpha=180^\circ$, o en tubos de Borda algo largos.

En un cono divergente o difusor, siguiendo a Andres (1909), se llama *rendimiento* a la razón entre el aumento de cota piezométrica y la disminución de altura de velocidad; se designa con la letra η . Si h_0 y h_1 y U_0 y U_1 son las cotas piezométricas y las velocidades medias, iniciales y finales, se tiene:

$$\eta = \frac{h_1 - h_0}{\frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}} \quad (37)$$

El rendimiento, que es la cualidad que mejor caracteriza en la práctica a un difusor, valdría la unidad si no existieran pérdidas de carga; prácticamente tiene valores siempre menores. Depende, pues, el rendimiento de las pérdidas de carga. Estas, como se dijo, son de tres clases: pérdida de entrada, que se puede evaluar en $\frac{1}{2}$ de altura de velocidad de entrada, y que, por lo tanto, no es función del ángulo. Esta pérdida puede faltar y de hecho no existe en muchas aplicaciones prácticas si los bordes de entrada son redondeados o si el diámetro de entrada al difusor es igual al de la canalización que le precede. El factor de resistencia en función de la altura de velocidad final es (Fig. 74);

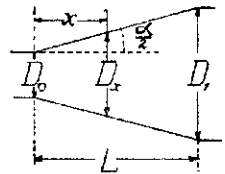


Fig. 74

$$\lambda_o = \frac{1}{2} \frac{\Omega_o^2}{\Omega_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(D - 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4}{D_1^4} \quad (38)$$

A la pérdida de frotamientos, que es distinta de la de escurrimiento uniforme, podría asignársele aproximadamente un factor de resistencia como el obtenido para los tubos convergentes, que en función de la altura de velocidad de entrada, donde el diámetro es D_o sería:

$$\lambda_f = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{D_o^4}{\left(D_o + 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} \right] \quad (39)$$

o en función de la altura de velocidad final y del diámetro final D_1 :

$$\begin{aligned} \lambda_f &= \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{\left(D_1 - 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4}{D_1^4} \right] \frac{D_1^4}{\left(D_1 - 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} = \\ &= \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{D_1^4}{\left(D_1 - 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} - 1 \right] \quad (40) \end{aligned}$$

o en función de las secciones:

$$\lambda_f = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - 1 \right) \quad (40a)$$

Dependen, pues, los frotamientos no sólo del ángulo α , sino también de la longitud del tubo, manifestada en un difusor del ángulo dado por la relación de los diámetros o de las secciones terminales. Para una relación dada $\Omega_1/\Omega_0 > 1$, los frotamientos varían inversamente con el ángulo, valiendo ∞ para $\alpha = 0^\circ$ (1).

La tercera pérdida de carga y la más propia del difusor es la debida al ensanchamiento paulatino de la corriente líquida. Esta pérdida se verifica, generalmente en el caso de un difusor intercalado en una canalización, pues un cono divergente colocado al final de una corriente necesita ser de ángulo menor de 8° para ser llenado y en cambio, intercalado, cualquier ángulo es llenado por la corriente. El mecanismo de este fenómeno nos es desconocido, pero hay algunos razonamientos que nos dan alguna idea de la causa de la perturbación que ocasiona la pérdida de carga. Al llegar al difusor los filetes medios locales son paralelos como también lo son después del difusor; rige, en consecuencia, antes y después del ensanchamiento la ley hidrostática. Luego se podría aceptar que la disminución de altura de velocidad es igual para todos los filetes. Si esto fuera verdad, los filetes cuya altura de velocidad inicial fuera menor que la disminución de altura de velocidad media, perderían en el difusor toda su velocidad. En realidad, la viscosidad ayuda al escurrimiento y posiblemente, en los ángulos muy grandes, exista realmente líquido muerto. Además, a la disminución de velocidad en los filetes menos veloces, correspondería mayor expansión o aumento de sección que o los más rápidos. A esta transmisión de energía cinética de un filete a otro, necesaria en un difusor para mantener la permanencia del escurrimiento, corresponde una producción de choques y desorganización de la corriente, que se traduce en una pérdida de carga. Añádase a todo lo dicho la inercia de los filetes que tienden a seguir trayectorias de la dirección inicial y así se podrá explicar el hecho, experimentalmente comprobado, de la mayor pérdida de carga que se observa en los difusores precedidos de movimientos estratificados o de velocidades iguales. Parece aceptable, según lo anterior, que los choques y la perturbación, o sea la pérdida de carga, sea proporcional a la expansión por unidad de longitud, es decir, al ángulo del difusor, bajo cierto límite.

Gibson experimentó (2) la pérdida de carga de los difusores, eliminando la de entrada, expresándola en % de la de ensanche brusco, calculada ésta por la fórmula de Borda:

$$A = \xi \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right) \frac{U_1^2}{2g} \quad (41)$$

(1) Lo que equivale a decir que para Ω_1/Ω_0 mayor que la unidad, $\alpha = 0^\circ$ exige longitud infinita.

(2) Experiencias publicadas en Proc. Royal Society 83 - A - 1910 y Transactions Royal Society 48 - 97 - 1911 y en Hydraulics 1912 pág. 83. Han sido reproducidas por Weil en Neue Grundlagen der Technischen Hydrodynamik (1920) y por Spataro en Idraulica Teorica e Sperimentale - 1924.

Este número de Gibson, llamado ξ , que suma el efecto de los frotamientos y del ensanche paulatino, se puede relacionar con el rendimiento, poniendo, con las notaciones indicadas:

$$h_o + \frac{U_o^2}{2g} - \left(h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) = \xi \frac{U_o - U_1}{2g}$$

Introduciendo el valor de η dado anteriormente se puede escribir:

$$\eta = 1 - \xi \frac{U_o - U_1}{U_o + U_1} \quad (42)$$

Poniendo en vez de las velocidades, las secciones deducidas de las relaciones de escurrimiento permanente $\Omega_o U_o = \Omega_1 U_1$ se llega a:

$$\eta = 1 - \xi \frac{\Omega_1 - \Omega_o}{\Omega_1 + \Omega_o} \quad (42a)$$

A medida que crece el ángulo en un tubo de longitud dada, o cuando, siendo el ángulo de divergencia constante, se supone creciente la longitud del difusor, la fracción final tiende a la unidad, pues Ω_o se hace despreciable al lado de Ω_1 .

Imposible nos es dar un valor analítico al número de Gibson que suma la pérdida de ensanche paulatino con la de frotamientos; sin embargo, llamando K el factor de resistencia debido al ensanche paulatino, aceptando el valor de los frotamientos dado anteriormente y poniendo el factor de resistencia en función de ξ se llegaría a:

$$\Sigma \lambda = \frac{g b}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_o^2} - 1 \right) + K = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^2 \quad (43)$$

de donde:

$$\xi = \frac{g b}{tg \frac{\alpha}{2}} \frac{\Omega_1 + \Omega_o}{\Omega_1 - \Omega_o} + K \frac{\Omega_o^2}{(\Omega_1 - \Omega_o)^2} \quad (44)$$

Si, dada nuestra falta de conocimientos del valor de K , no podemos estudiar analíticamente el valor del número de Gibson, nos sirve, sin embargo, esta expresión para notar que para $\alpha=0$, el valor de $\xi=\infty$ y también que el número de Gibson depende de la relación de secciones terminales, dependencia que, refiriéndonos únicamente al ensanche paulatino, indica que ξ varía en razón inversa de la razón

$\frac{\Omega_1}{\Omega_o}$. Todos estos hechos han sido confirmados experimentalmente por Gibson. Las experiencias de Fliegner dan para el segundo término del número de Gibson, en ángulos menores de 30° , el valor *sen* α o simplemente α . Como en estos casos

$tg \frac{\alpha}{2}$ también es reemplazado por $\alpha/2$, se puede poner simplemente:

$$\xi = \frac{2 g b}{\alpha} \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{\Omega_1 - \Omega_0} + \alpha \quad 44a$$

Esta expresión pasa por un mínimo para

$$\alpha = \sqrt{2 g b \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{\Omega_1 - \Omega_0}} \quad (45)$$

Poniendo $b = 0,0004$, se tiene $2 g b = 0,008$ y con los Ω_1/Ω_0 , da los ángulos α que producen los ξ mínimos, que se indican a continuación:

| | | | | | | | | |
|-----------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\Omega_1/\Omega_0 =$ | 1,5 | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 | 20 | ∞ |
| $\alpha =$ | 11°26' | 8°51' | 7°12' | 6°15' | 5°51' | 5°39' | 5°22' | 4°36' |
| $\xi_{min.} =$ | 0,40 | 0,30 | 0,25 | 0,22 | 0,20 | 0,20 | 0,19 | 0,18 |

Según Gibson, la variación del número ξ es dada por el gráfico de la Fig. 75.

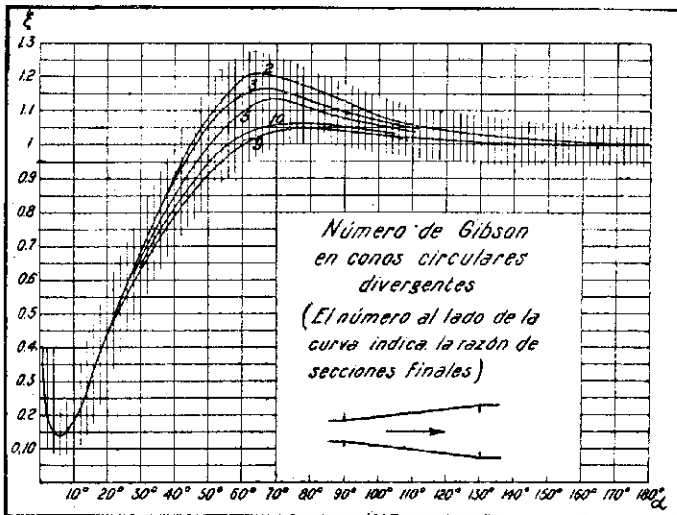


Fig. 75

Para el ángulo $\alpha=0$, ξ vale ∞ . En seguida decrece muy rápidamente. El mínimo es menor que el indicado anteriormente, y prácticamente coincide en un mismo ángulo para todos los valores de las razones Ω_1/Ω_0 experimentadas y vale 0,137. El valor correspondiente de α es 5°30'. Sube después rápidamente, de nuevo, con un

valor común cualquiera que sea la razón Ω_1/Ω_0 hasta 20° donde $\xi=0,44$. Después de este ángulo se nota la influencia de Ω_1/Ω_0 , pues, al paso que ξ vale la unidad para $\alpha=45^\circ$ cuando $\Omega_1/\Omega_0=2$, pasa por ese valor cuando $\alpha=60^\circ$, si $\Omega_1/\Omega_0=9$. En ángulos mayores que éstos, ξ vale más de la unidad, llegando hasta $\xi=1,21$ para $\alpha=63^\circ$ en $\Omega_1/\Omega_0=2$ y a $\xi=1,05$ para $\alpha=70^\circ$ si $\Omega_1/\Omega_0=9$. Después decrece ξ hasta valer prácticamente la unidad en $\alpha=180^\circ$ o ensanche brusco. (1)

Parece anómalo a primera vista que en un ensanche paulatino pueda haber pérdidas de carga mayores que en un ensanche brusco, si la razón de secciones anterior y posterior al ensanche es, en ambos casos, la misma; pero si se considera que en difusores de ciertos ángulos la adherencia del líquido a la pared pueda significar una expansión de mayor ángulo que la del *ensanchamiento libre* que se verifica en una canalización de ensanche brusco, fácilmente nos damos una explicación de este hecho. (2)

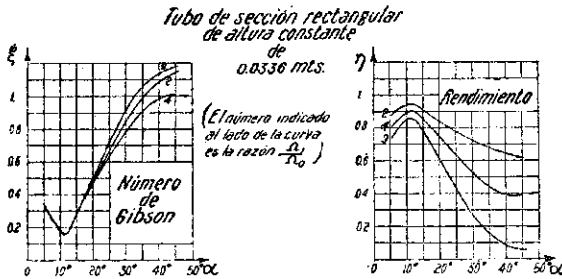


Fig. 76

En tubos de sección rectangular con dos caras paralelas y en troncos de pirámides de base cuadrada, también experimentó Gibson. En la Fig. 76 damos los resultados experimentales del número de Gibson en tubos de sección rectangular.

(1) Gibson para conos circulares cuyos ángulos estén comprendidos entre $7^\circ 30'$ y 35° da los valores empíricos siguientes: $\xi=1,1\alpha^{1,22}$ o bien $\xi=3,5 \left(\lg \frac{\alpha}{2}\right)^{1,22}$. En Chile, el profesor Salas E., aceptando en la expresión (44a, el coeficiente b con el valor medio $0,0004$ y la fracción de las secciones igual a la unidad, da la expresión:

$$\xi = \alpha + \frac{0,008}{\alpha} \tag{44b}$$

válida desde 0° hasta 35° , que tiene el valor mínimo $\xi=0,179$ para $\alpha=5^\circ 8'$.

Para ensanches paulatinos en tubos de sección rectangular da Gibson, para paredes que se abren con ángulos de 10° a 35° el valor $\xi=0,072 \alpha^{1,4}$.

(2) Bastaría aceptar que en el ensanche brusco la expansión de la vena corresponde a cierto ángulo, y que si el de ensanche paulatino es mayor se obliga a la corriente a abrirse más rápidamente.

En la Fig. 77 está el valor del rendimiento de conos circulares, dado en función

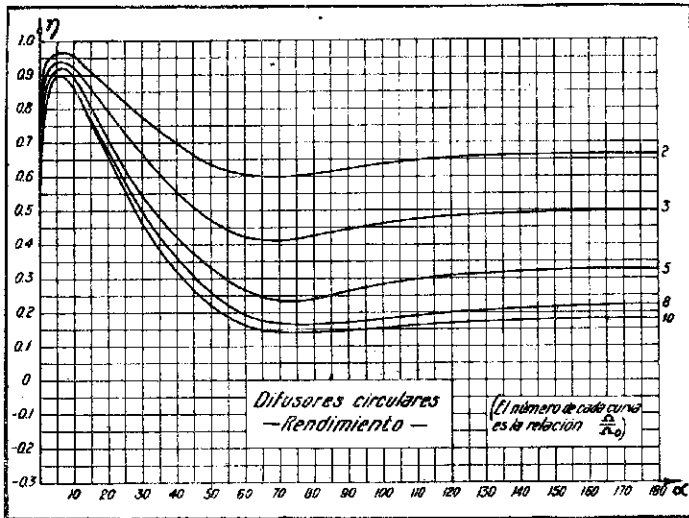


Fig. 77

del número de Gibson por la fórmula (42a, tomando el número de Gibson experimental.

En la Fig. 78 aparece el número ξ y el rendimiento de tubos de sección cuadrada.

Resumiendo lo dicho, el factor de resistencia de las pérdidas de frotamientos y ensanche paulatino de un difusor es:

$$\lambda = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)$$

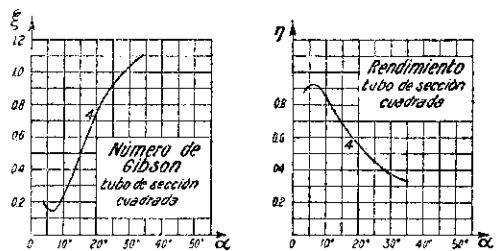


Fig. 78

a la cual, si agregamos la de entrada

$$\lambda_e = \lambda_e \frac{U_0^2}{2g} = \lambda_e \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \frac{U_1^2}{2g} \tag{46}$$

se tendrá:

$$\Sigma \lambda = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 + \lambda_e \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} \tag{47}$$

$$\Sigma \lambda = \eta - 1 + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} (1 - \eta + \lambda_e) \tag{47a}$$

El coeficiente λ_e se estima según las normas dadas anteriormente, ya exista

contracción completa, imperfecta o suprimida en parte.

En función de la altura de velocidad inicial se puede poner:

$$\Sigma \lambda_o = \Sigma \lambda \frac{\Omega_o^2}{\Omega_1^2} = \xi \left(1 - \frac{\Omega_o}{\Omega_1} \right)^2 + \lambda_e \quad (48)$$

El coeficiente de velocidad φ igual al de gasto $m = \varphi = \frac{I}{\sqrt{1 + \Sigma \lambda}}$ es:

$$m = \frac{I}{\sqrt{1 + \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^2 + \lambda_e \frac{\Omega_1^2}{\Omega_o^2}}} \quad (49)$$

o en función del rendimiento:

$$m = \frac{I}{\sqrt{\eta + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_o^2} (1 - \eta + \lambda_e)}} \quad (49a)$$

La relación entre el gasto de un difusor y el que hubiera habido si no hubiese existido el ensanche es:

$$M = m \frac{\Omega_1}{\Omega_o} = \frac{I}{\sqrt{\frac{\Omega_o^2}{\Omega_1^2} + \xi \left(1 - \frac{\Omega_o}{\Omega_1} \right)^2 + \lambda_e}} \quad (50)$$

o en función del rendimiento:

$$m = \frac{I}{\sqrt{1 - \eta \left(1 - \frac{\Omega_o^2}{\Omega_1^2} \right) + \lambda_e}} \quad (50a)$$

El máximo de M , en caso de no haber pérdida de entrada se produce con el ángulo de $5^\circ 30'$ que corresponde al mínimo del número de Gibson, $\xi = 0,135$ que, introducido en la ecuación (50), se hace máximo cuando la relación $\Omega_1/\Omega_o = 8,41$ y vale:

$$m = \frac{I}{\sqrt{0,1189 + 0,135 (1 - 0,1189)^2}} = 2,90 \quad (50b)$$

es decir, que con un difusor adecuado se obtiene 2,9 veces mayor gasto que desa-

guando al aire libre. Con otras relaciones de Ω_1/Ω_0 , en el mismo ángulo de $5^\circ 30'$, de mínimo número de Gibson, también sin pérdida de entrada, se obtiene para M los siguientes valores.

| | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|
| $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} =$ | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| $M =$ | 1,88 | 2,43 | 2,81 | 2,90 | 2,89 |

En caso de haber una pérdida de entrada, el máximo de M conservando el ángulo, corresponde a la misma relación $\Omega_1/\Omega_0 = 8,41$ y si la pérdida de entrada vale media altura de velocidad el mayor valor de M baja a 1,27. Si $\lambda_e = 1$ (como tubo entrante) M desciende a 0,94; es decir, que da mayor gasto el desagüe al aire libre con sección Ω_0 , que agregando un difusor de rendimiento máximo, pero de entrada como tubo de Borda.

Para terminar es útil indicar que las experiencias aisladas anteriores a las de Andres y Gibson, como son las de Francis (1871), Montanari (1897) y otros, encuadran bien en los resultados que dan las expresiones expuestas.

Una aplicación práctica de conos convergentes y divergentes constituye el *venturímetro*, aparato destinado a medir el gasto por

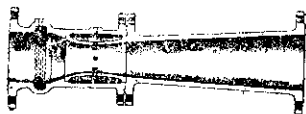


Fig. 79

la simple lectura de las diferencias, entre las cotas piezométricas anterior al aparato y la de la parte más estrecha. La Fig. 79 es un corte del venturímetro en su forma más común: como se ve, en vez de un cono convergente se trata de una boquilla cuyo coeficiente de gasto es superior

a 0,96 y casi llega a 0,98. El diámetro de la garganta es, generalmente, la tercera parte del diámetro de la cañería en que va instalado; la longitud de la boquilla es, generalmente, de un diámetro de esa cañería. Si en vez de boquilla se pone un cono

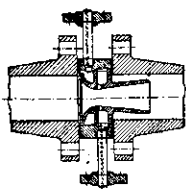


Fig. 80

no convergente, su longitud es ordinariamente de 2,5 diámetros, lo que le da un ángulo de $15^\circ 10'$. Al difusor que enlaza la boquilla de la cañería se le da una longitud de 7,5 diámetros, o sea, el ángulo de rendimiento máximo de $5^\circ 6'$. Este difusor puede faltar como en la Fig. 80, lo que tiene por único efecto el aumentar la pérdida de carga total del aparato.

Si llamamos h_0 y U_0 la cota piezométrica y la velocidad media a la entrada del venturímetro y h_1 y U_1 las mismas en la garganta, se puede escribir:

$$h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} (1 + \lambda)$$

Por la permanencia del escurrimiento, si Ω_0 y Ω_1 son las secciones de entrada y en la garganta, se tiene:

$$h_0 - h_1 = \frac{U_1^2}{2g} \left(1 + \lambda - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} \right)$$

de donde, introduciendo el gasto $Q = \Omega_1 U_1$, se obtiene finalmente:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 + \lambda - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}} \sqrt{2g(h_0 - h_1)} \quad (51)$$

Las secciones son constantes y teóricamente λ también lo es, de modo que se puede poner:

$$Q = K_1 \sqrt{h_0 - h_1} \quad (52a)$$

o, si se quiere, englobando en la constante únicamente las magnitudes invariables y poniendo por efecto de λ un coeficiente de gasto Φ se suele escribir: (1)

$$Q = \Phi K \sqrt{h_0 - h_1} \quad (52b)$$

En la práctica Φ es casi perfectamente constante a partir de velocidades en la garganta, superiores a 6 m:seg., es decir, con la relación corriente de diámetros, siempre que la corriente anterior y posterior tenga velocidades superiores a 0,7 m:seg. El valor de Φ es corrientemente superior a 0,98 e inferior a 0,99 (2).

El problema de leer en una esfera o registrar el gasto, consiste en que siendo el gasto proporcional a la raíz de la desnivelación piezométrica $h_0 - h_1$, es necesario

(1) En realidad Φ es la razón entre el gasto efectivo de un venturímetro y el que hubiera habido si se hubiese tomado $\lambda = 0$, que sería dado por la fórmula:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}} \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$$

if

Con el valor usado en la práctica de la razón de secciones $\frac{1}{9}$, el de $\Phi = 0,98$, supone $\lambda = 0,053$.

(2) Las anomalías estudiadas por Gibson que arrojaban valores de Φ muy superiores a la unidad, no son reales y se debieron a los registradores de las presiones.

hacer que los desplazamientos indicadores sean sencillamente proporcionales al gasto.

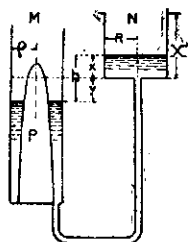


Fig. 81

Para esto se ha ideado el piezómetro en U de la Fig. 81, cuya rama M está comunicada con la entrada del venturímetro y en cuya rama N, comunicada con la garganta, hay un flotador, cuyo vástago hace los desplazamientos indicadores. La rama M tiene un cuerpo central de forma de un paraboloides de revolución (1) o tiene toda ella forma de un perfil parabólico, a que se debe la proporcionalidad entre los gastos que pasan y los desplazamientos del flotador.

EJEMPLO N.º 1.—Calcular la pérdida de carga total que introduce en la cañería en que va intercalado el venturímetro de la Fig. 82, compuesto de un cono convergente de entrada, de una garganta de paredes curvas para evitar toda contracción y del cono difusor de salida, cuando el gasto que escurre es de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ y la presión final absoluta es $\frac{p}{\gamma} = 30 \text{ m}$.

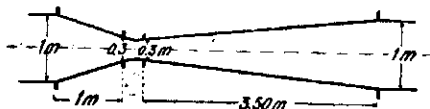


Fig. 82

Calcular, además, qué gasto máximo

puede medirse con este aparato sin que en la garganta se desprendan gases disueltos, si se acepta que el desprendimiento se hace con una presión absoluta de 4 m.

(1) Para tener la proporcionalidad entre los gastos y los desplazamientos del flotador que hay en la rama N, lo que se desea es que se cumpla la relación (fig. 81).

$$\frac{Q}{Q_{\text{máx.}}} = \frac{x}{X} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_{\text{máx.}}}} \quad (53)$$

en esta ecuación Q es el gasto que corresponde a una altura x en la rama N y h , la desnivelación piezométrica $h_0 - h_1$, que corresponde al gasto Q . Las magnitudes X y $h_{\text{máx.}}$ son correspondientes al mayor gasto $Q_{\text{máx.}}$, que mide el venturímetro. Los valores de X y $h_{\text{máx.}}$ son, pues, constantes del aparato.

Llamando m la razón $h_{\text{máx.}}/X^2$, se obtiene la relación

$$m = \frac{h}{x^2} = \frac{x+y}{x^2}$$

de donde

$$y = x(m x - 1) \quad (54)$$

La cantidad y que es la diferencia entre el fondo del estanque de la rama N y el nivel del mercurio de la rama M, conviene que sea grande, por lo que hay conveniencia de hacer grande m ; la curva que representa el valor de y en función de x da para $x=0$, $y=0$, pasa por el valor máximo $y = -1/4 m$ para $x=1/2 m$, y vuelve a dar $y=0$ para $x=1/m$, después, para x mayores de $1/m$, da valores de y positivos. Los y se cuentan positivos hacia abajo, de modo que los valores negativos son superiores al nivel del fondo de la rama N y deben ser suprimidos. En otras pala-

Denominando con los sub-índices 1, 2, 3 y 4 las magnitudes de los elementos a la entrada del cono convergente, a la salida de él, a la entrada del cono divergente y a su salida, respectivamente, notemos que no hay pérdidas de entrada ni en 1 ni en 3, por consiguiente, las que debemos considerar son:

- a) Pérdidas por frotamientos entre 1 y 2;
- b) Pérdidas por frotamientos y por ensanche paulatino entre 3 y 4.

Referiremos estas pérdidas a la altura de velocidad final $\frac{U_4^2}{2g}$, que es igual a la de entrada, pues $\Omega_1 = \Omega_4$.

El factor de resistencia en alturas de velocidad de 2 en el cono convergente es:

$$\lambda_{1-2} = \frac{0,004}{\alpha} \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

bras, y sin entrar en mayores detalles, en gastos pequeños no se logra la proporcionalidad entre la lectura y el gasto.

La forma del cuerpo central P se determina por la relación que da la igualdad del volumen V que baja el mercurio en M y sube en N , que se puede escribir, para un desplazamiento infinitesimal, con las notaciones de la Fig 81, si llamamos además r el radio del cuerpo central, correspondiente al desnivel piezométrico h :

$$dV = \pi(\rho^2 - r^2) dy = \pi R^2 dx$$

Se elimina dy , diferenciando la ecuación (54), y se obtiene:

$$r^2 = \rho^2 - \frac{R^2}{2mx - 1}$$

La ecuación (54), nos da la raíz útil de x :

$$x = \frac{l}{2m} + \sqrt{\frac{l}{4m^2} + \frac{y}{m}}$$

que introducida en la expresión anterior, simplificando, da finalmente:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\sqrt{1 + 4my}}} \quad (55)$$

ecuación que relaciona el radio del cuerpo central de revolución P con y y con las demás constantes de construcción del piezométrico diferencial. La ecuación (55), es la de una parábola de 2.º grado.

Si en vez de cuerpo central se da a la rama M la forma curva el radio r_1 , a la altura y , habría tenido por ecuación

$$r_1 = \frac{R}{(1 + 4my)^{\frac{1}{2}}} \quad (55a)$$

y en alturas de velocidad de 4, notando que los diámetros de 1 y 4 son iguales entre sí y que a su vez también lo son los de 2 y 3

$$\lambda_{1-2} = \frac{0,004}{\alpha} \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right) \frac{D_1^4}{D_2^4}$$

$$\lambda_{1-2} = \frac{0,004}{\alpha} \left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)$$

El factor de resistencia de 3 a 4 es:

$$\lambda_{3-4} = \xi \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_4} - 1 \right)^2 + \xi \left(\frac{D_3^2}{D_4^2} - 1 \right)^2$$

en alturas de velocidad de 4.

El factor de resistencia total será:

$$\lambda_t = \frac{0,004}{\alpha} \left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right) + \xi \left(\frac{D_3^2}{D_4^2} - 1 \right)^2$$

En nuestro caso, en el cono convergente $tg \frac{\alpha}{2} = 0,35$ y como se dijo, la igualdad de diámetro nos da: $\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_3}{D_4} = 3,33$.

Luego.

$$\lambda_t = \frac{0,004}{0,350} (124 - 1) + \xi (11,1 - 1)^2$$

$$\lambda_t = 1,4 + \xi 102.$$

El ángulo del difusor es: $tg \frac{\alpha_1}{2} = \frac{0,35}{3,5} = 0,1$, o sea $\frac{\alpha_1}{2} = 5^\circ 40'$ y $\alpha_1 = 11^\circ 20'$.

Para este ángulo vemos (Fig. 75) que ξ es independiente de la razón de secciones y vale 0,21. Por consiguiente:

$$\lambda_t = 1,40 + 102 \times 0,21 = 1,40 + 21,4 = 22,8$$

La altura de velocidad de 4 cuando pase de 1 m².s. es:

$$\frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{1}{2g} = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{1}{2g} = 0,083 \text{ mts.}$$

La pérdida de carga total será

$$\Delta = 22,80 \times 0,083 = 1,89 \text{ mts.}$$

La ecuación del gasto de este venturímetro, introduciendo valores en la ecuación (51, de la página 265) es:

$$Q = \frac{0,0706}{\sqrt{1 + 0,113 - 0,008}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 0,297 \sqrt{h_1 - h_2}$$

La aplicación de Bernoulli entre 1 y 4 en nuestro venturímetro da:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_4 + \frac{U_4^2}{2g} (1 + 22,8)$$

de donde, introduciendo el gasto y los valores numéricos $\Omega_1 = 0,785 \text{ m}^2$ y $h_4 = 30 \text{ m}$, obtendremos:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{22,8}} \sqrt{2g(h_1 - h_4)} = 0,728 \sqrt{h_1 - 30}$$

Introduciendo en la ecuación del gasto de arriba la condición de desprendimiento de gases, $h_2 = 4 \text{ m}$, e igualándola con esta última se tendrá:

$$0,728 \sqrt{h_1 - 30} = 0,297 \sqrt{h_1 - 4}$$

de donde $h_1 = \frac{176,9}{5,03} = 35,2 \text{ m}$. Este valor, introducido en cualquiera de las ecuaciones del gasto nos da finalmente $Q = 1,66 \text{ m}^3/\text{s.}$, que es el mayor caudal que puede ser medido en el venturímetro sin desprendimiento de gases.

EJEMPLO N.º 2.—¿Qué ángulo y qué longitud debe darse al difusor de la Fig. 83 que arranca de un estanque y desagua al aire para que el gasto que escurre sea máximo si la carga h es de 1 m ?

Según lo expuesto en la página 264, vemos que el ángulo que produce el mayor gasto es $\alpha = 5^\circ 30'$ con razón de secciones $\Omega_1/\Omega_0 = 8,41$. Vemos también que si se computa la pérdida de entrada en media altura de velocidad, M vale $1,27$; o sea, que el gasto que escurre en estas condiciones es:

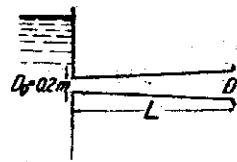


Fig. 83

$$Q = 1,27 \frac{\pi}{4} 0,04 \sqrt{2g h} = 0,175 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Las dimensiones del tubo quedan determinadas por el diámetro inicial, ángulo y relación de secciones. El diámetro final es:

$$D_1^2 = D_0^2 \times 8,41$$

$$D_1 = D_0 \sqrt{8,41} = 0,58 \text{ mts.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 2^\circ 45' = \frac{0,58 - 0,2}{2 L} = \frac{0,19}{L}$$

Introduciendo $\operatorname{tg} 2^\circ 45' = 0,048$, el largo es: $L = \frac{0,19}{0,048} = 3,98 \text{ mts.}$

360. Codos y curvas.—Si las pérdidas de carga son debidas a un codo o cambio brusco de dirección del eje de la corriente, el teorema de las cantidades de movimiento da algunas indicaciones sobre el mecanismo del fenómeno.

Considerando (Fig. 84) la masa líquida comprendida entre la sección AB de

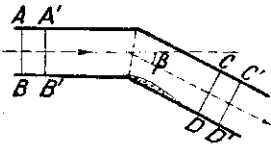


Fig. 84

aguas arriba del codo y la sección CD aguas abajo, de la misma área, en que rige nuevamente la ley hidrostática, que al cabo de un lapso dt avanza de una longitud $U dt$ y llega a $A'B'$, $C'D'$. El incremento (negativo) de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo tiene el siguiente valor, proyectado sobre la dirección última del escurrimiento que forma un ángulo β con la primitiva:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega U (U \cos \beta - U) = \frac{\gamma}{g} U^2 \Omega (\cos \beta - 1)$$

La resultante de las fuerzas exteriores que obran sobre la masa no se altera, si se deduce de todas las presiones, en esta superficie cerrada, la presión p_0 que obra sobre AB . Hecha esta supresión y prescindiendo de los frotamientos parietales y del peso, queda la presión $(p_1 - p_0) \Omega$, normal a CD . Los saldos de presiones parietales sobre la superficie cilíndrica entre AB y el codo mismo dan una resultante P , normal al eje primitivo del tubo y las presiones en la envoltura cilíndrica comprendida entre el codo mismo y la sección CD , de proyección nula. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} U^2 \Omega (1 \cos \beta) &= -(p_1 - p_0) + P \operatorname{sen} \beta \\ \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} &= 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \frac{U^2}{2g} - P \frac{\operatorname{sen} \beta}{\gamma \Omega} \end{aligned} \quad (56)$$

El primer miembro es la pérdida de carga, dada la constancia de $U^2/2g$ en ambas secciones.

Si las velocidades en todos los puntos de las paredes fueran iguales, también serían las presiones iguales a p_0 , según el teorema de Bernoulli, aplicable hasta el codo mismo; P sería nulo. Luego:

$$\lambda = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \tag{56a}$$

En esta hipótesis, para $\beta=90^\circ$ se obtiene $\lambda=2$; pero la experiencia da, en tubos grandes, valores cercanos a la unidad, que sólo se acercan a 2 cuando los diámetros son muy pequeños.

Weisbach (1845) estudió codos de diferentes ángulos en tubos de 0,03 m. de diámetro y propuso la siguiente fórmula empírica, en que se han suprimido los decimales innecesarios:

$$\lambda = \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} + 2 \operatorname{sen}^4 \frac{\beta}{2} \tag{57}$$

Esta fórmula dará pérdidas menores que la hipótesis $P=0$ lo que indicaría que siempre $P < 0$. Según esta fórmula se obtiene:

| | | | | | | | |
|-------------|---|------|------|-----|------|------|------|
| $\beta =$ | 0 | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° |
| $\lambda =$ | 0 | 0,07 | 0,37 | 1,0 | 1,9 | 2,6 | 3,0 |

Los valores de λ aumentan al disminuir el diámetro D del tubo. Weisbach, en codos de ángulo recto y $D=0,01$ ha medido $\lambda=1,54$ en vez de $\lambda_{90^\circ}=1$, indicado para $D=0,03$.

Montanari (1897) propone, para codos de 90°

$$\lambda_{90^\circ} = 1,09 + \frac{0,000045}{D^2} \tag{58a}$$

Si el codo desagua al aire libre y la rama final tiene una longitud de $5D$ da:

$$\lambda_{90^\circ} = 1,3 + \frac{0,000053}{D^2} \tag{58b}$$

Se obtiene según estas expresiones:

| | | | | | |
|---------------|------------------------|------|------|-------|----------|
| | $D =$ | 0,01 | 0,03 | 0,10 | (metros) |
| fórmula (58a) | $\lambda_{90^\circ} =$ | 1,54 | 1,14 | 1,095 | |
| fórmula (58b) | $\lambda_{90^\circ} =$ | 1,83 | 1,36 | 1,31 | |

Dice Montanari que si el ángulo es distinto de 90° basta multiplicar estos resultados por la relación $(\beta/90^\circ)^2$.

Brightmore (1907), obtuvo en tubos de 7,5 a 10 cm. de diámetro para codo de 90°.

$$\lambda_{90^\circ} = 1,17$$

Puppini (1915), da valores de la pérdida de carga como un 40% mayores que los de Weisbach; pérdida que según él, para codos de 90°, obedece a la expresión

$$\lambda_{90^\circ} = 1,20 + 0,14 \frac{d - 0,02}{d(v + 0,50)}$$

válida para diámetros d , menores de 4 cm. y velocidades v , menores de 4,8 mts. En las experiencias de Puppini, en codos de 45°, se encuentra que λ baja en un 25% del de 90° en tubos mayores de 2 cm. y a 30% si son menores de 1 cm., lo que está de acuerdo con lo establecido por Weisbach.

Las experiencias del Instituto de Hidráulica de Munich (1) dan los siguientes resultados en diámetros de 43 mm.:

| | | | | | |
|-------------|--------|-------|-------|-------|------|
| $\beta =$ | 22°30' | 30° | 45° | 60° | 90° |
| $\lambda =$ | 0,05 | 0,102 | 0,236 | 0,471 | 1,13 |

En vista de estos datos, podría aceptarse para ángulos rectos los siguientes coeficientes de resistencia, intermedios entre los experimentales e interpolar entre ellos:

| | | | | |
|------------------------|------|------|-------|----------|
| $D =$ | 0,10 | 0,01 | 0,005 | (metros) |
| $\lambda_{90^\circ} =$ | 1 | 1,5 | 2 | |

Si el ángulo β no es recto, se podría, simplemente, multiplicar el coeficiente λ_{90° , relativo al diámetro, por el valor que para este ángulo indica la tabla de Weisbach, ya que en ella a 90° corresponde la unidad.

Los codos de 90° hacen perder $U^2/2g$ si los diámetros no son tan chicos que puedan temerse perturbaciones capilares.

El fenómeno de la pérdida de carga en curvas ha sido asimilado también por Boussinesq a una sucesión de codos, pero la experimentación no ha confirmado la hipótesis hecha.

Parece que el fenómeno de las pérdidas de carga en curvas se debe a una perturbación de entrada, a una perturbación durante la curvatura que consume cierta cantidad de energía en exceso sobre el trabajo ordinario de los frotamientos, y a una perturbación de salida mientras el escurrimiento se va adaptando nuevamente al eje recto, lo que no se obtiene perfectamente, según Schoder, antes de 76 diámetros corridos.

En pocas cuestiones de Hidráulica se está en presencia de experiencias más enigmáticas y difíciles de interpretar como actualmente en las resistencias de las

(1) De Thomá y Kirchbach (1936).

curvas. La anomalía de los resultados puede, sin embargo, explicarse por la pequeñez de la pérdida por medir, que varía enormemente con el estado de rugosidad de las paredes de las curvas experimentadas, que son las que proporciona la industria.

La fórmula de Weisbach, explicada por Lang en el Hütte, atendiendo sólo a las perturbaciones de entrada y salida, establece que las pérdidas son independientes de la longitud del arco y sólo función de las dimensiones del tubo y del radio de curvatura. Por el contrario, las consideraciones de Saint-Venant y Boussinesq conducen a pérdidas proporcionales a la longitud de las curvas:

$$\lambda = \frac{l}{10 \rho} \sqrt{\frac{D}{\rho}}$$

siendo D el diámetro del tubo, ρ el radio de curvatura y l la longitud del arco. Las experiencias de Freeman, en mangueras, indican, para un total de 3 vueltas formadas por 3 círculos, por 12 cuadrantes y por 24 curvas de 45° , respectivamente, separados por trozos rectos: $\lambda = 0,83$; $0,88$ y $1,21$, respectivamente, lo que parece demostrar que las pérdidas crecen menos que proporcionalmente a la longitud. Schoder (1909) encontró valores despreciables en cañerías con 4° grado de ángulo. En realidad, parece que, como para la expansión perfecta de los filetes hay una longitud mínima, las relaciones de la pérdida de carga con la longitud son complejas.

Según las fórmulas de Dubuat y Weisbach, a igualdad de ángulo de contingencia, la curva de mayor radio da menor pérdida; pero, experiencias posteriores han manifestado que un radio ρ muy grande disminuye la pérdida por unidad de largo en menor proporción que el de aumento de longitud, resultando de aquí que con cierta proporción de ρ/D el coeficiente λ_{90° es mínimo.

Según los experimentadores de Detroit (1) y según las fórmulas empíricas de Alexander (1905), este mínimo corresponde a $\rho/D = 2,5$. Según Brightmore (1907), λ_{90° , que es mínimo para $\rho/D = 3$ ó 4 , crece hasta ser $\rho/D = 6$ ó 7 y vuelve después a disminuir. Según Saph & Schoder λ_{90° pasa por un mínimo cuando $\rho/D = 15$. Según Hofmann no hay este mínimo. Pero, en realidad, λ_{90° es casi constante para los valores de ρ/D mayores de $2,5$ (2).

El valor de λ_{90° crece con la velocidad U , según las experiencias de Davis (1909) hasta duplicarse y triplicarse en algunas curvas de tipos comerciales, entre $0,60$ m/seg. y 10 m/seg.; disminuye con la velocidad hasta la mitad en algunos aforos de Saph & Schoder entre 1 y 5 m/seg. y según las experiencias de Alexander, que abarcan un trayecto demasiado reducido para la expansión total de los filetes, decrecen en proporción a $U^{-0,225}$. Para $\rho > 2,5 D$ da la fórmula:

$$\lambda = 0,107 \left(\frac{D}{2} \right)^{0,83} U^{1,777}$$

y para $\rho < 2,5 D$

(1) Williams, Hubbel y Fenkel (1902).

(2) El gráfico de Hofmann deja en claro estas divergencias experimentales; Hofmann experimentó en el Instituto de Múnich en 1926.

$$\Lambda = 1,61 \left(\frac{D}{2} \right)^{2,5} U^{1,777}$$

Finalmente, en las experiencias de Brightmore, λ_{90° es prácticamente independiente de U .

Grande es también la divergencia en los valores absolutos de λ_{90° dados por los distintos experimentadores. He aquí, comparados, valores globalmente aproximados de λ_{90° para $\rho/D=2,5$ y 10 respectivamente.

| Experimentadores | Valores de λ_{90° para | |
|---------------------------------|--------------------------------------|-------------|
| | $\rho/D=2,5$ | $\rho/D=10$ |
| Weisbach | 0,20 | 0,12 |
| Freeman | 0,24 | 0,07 |
| Detroit (Williams y otros)..... | 0,20 | 0,70 |
| Saph & Schoder..... | 0,21 | 0,16 |
| Davis | 0,50 | 0,64 |
| Brightmore..... | 0,31 | 0,19 |
| Alexander | 0,04 | |
| Balch (1913)..... | 0,21 | 0,39 |
| Hofmann (1926)..... | 0,12 | 0,09 |

Son tan incoherentes estos datos respecto a los valores absolutos como a las propiedades de la función de ρ , D y U que dan el coeficiente de resistencia λ_{90° , que si fuera necesario adoptar valores numéricos, parecería lo más práctico tomar un valor constante para todas las curvas usuales de ángulo recto, que podrá ser $\lambda_{90^\circ} = 0,25$, término medio de las cifras indicadas en las dos columnas anteriores; se aceptaría también que las pérdidas son proporcionales prácticamente a los ángulos de contingencia, de modo que el coeficiente de resistencia en una vuelta entera sea la unidad.

Como complemento de codos es de algún interés el caso de unión o confluencia de dos corrientes o bien la bifurcación de ellas. En contorno cerrado estas uniones o separaciones se verifican en Tees. Han sido experimentadas Tees de ángulo recto por Davis y Daley (1) en Estados Unidos y por Vogel en Alemania (1926) bajo la dirección de Thoma (2). Según lo dicho en los codos, asimilando la Te a un codo, en el caso de desviación de 90° , la pérdida debe ser igual a una altura de velocidad de la rama desviada, lo que en término medio confirman las experiencias de Vogel y que había enunciado mucho antes Bélanger. Es evidente que la presencia de la corriente en la rama principal hace diferente el fenómeno de la Te del que se verifica en un codo, diferencia que se acentúa mientras menor es el gasto que sigue por la rama principal. En la rama principal de la Te, en caso de desviación de corriente, también se nota una pequeña pérdida de carga suplementaria en la corriente que sigue, pérdida debida en gran parte, quizás, a los defectos de construcción inevitables de las Tees experimentadas.

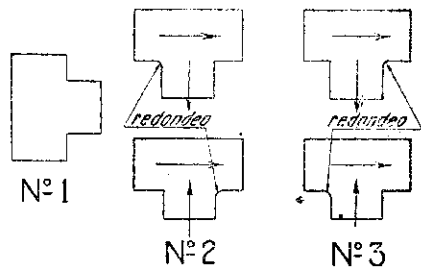
En caso de confluencia de corrientes la pérdida de carga es despreciable si el

(1) Tesis presentada a la Universidad de Cornell (1906),

(2) Instituto de Hidráulica de Munich.

gasto que se agrega por la rama secundaria es pequeño (1) y a la inversa, tiende a ser igual a la de un codo, cuando el gasto de la rama secundaria es mucho más importante que el que llega a la confluencia por la rama principal. A continuación van los resultados de Vogel divididos por él en tres series. La primera en tees sin redondeos, la segunda con redondeo de

2,5 mm. de radio por el lado conveniente al escurrimiento y la tercera con el mismo redondeo, situado al lado opuesto al escurrimiento (Fig. 85). Las tres series corresponden a división de corrientes y a confluencia de ellas y los diámetros de los tubos son de 43 mm. Llamando Q el gasto después de la T_e y Q_1 , el de la rama secundaria, se dan a continuación los coeficientes de resistencia λ en función de la altura de velocidad en la rama principal, a la salida de la T_e y λ_1 , de la rama secundaria. He aquí los coeficientes correspondientes a la razón $\frac{Q_1}{Q}$



a) DIVISIÓN DE CORRIENTES

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $\frac{Q_1}{Q} =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
| $\lambda =$ | 0 | 0 | 0,12 | 0,175 | 0,21 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,28 | 0,35 |
| $\lambda_1 =$ | 0,95 | 0,92 | 0,99 | 1,05 | 1,10 | 1,12 | 1,15 | 1,16 | 1,17 | 1,19 | 1,19 | 1,29 |

el menor valor de λ_1 , se verifica para $\frac{Q_1}{Q} = 0,04$ y es $\lambda_1 = 0,88$. Para el caso de la serie N.º 2 los coeficientes son 10% menores y para la serie N.º 3, un 5%.

b) CONFLUENCIA DE CORRIENTES

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|-----|-------|-------|------|------|------|------|------|
| $\frac{Q_1}{Q} =$ | 0 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,00 |
| $\lambda =$ | 0 | 0 | 0,014 | 0,075 | 0,17 | 0,30 | 0,46 | 0,66 | 0,91 |
| $\lambda_1 =$ | 0 | 0 | 0,09 | 0,29 | 0,47 | 0,61 | 0,72 | 0,82 | 0,91 |

En caso de la serie N.º 2 los coeficientes de resistencia son un 10% menores y en caso de la serie N.º 3 son un 15% menores.

(1) Las experiencias de Vogel dan para el coeficiente de resistencia valores negativos, que no pueden ser reales, cuando el gasto de la rama secundaria es pequeño en comparación del de la rama principal.

(Continuará).