Ing. Marcos Pedrero S.

Algunos problemas de resistencia de materiales

INTRODUCCION

Damos a continuación algunos problemas interesantes de resistencia de materiales.

a) Cálculo de puentes colgantes con viga de rigidez. No hay duda que la verdadera solución del problema ha sido dada por J. Resal, utilizando el teorema del ingeniero francés Godard. Las demás soluciones propuestas por Rankine, Ritter, Levy, etc., introducen hipótesis innecesarias y llegan a consecuencias que están en desacuerdo con la experiencia.

b) Otro problema de que nos ocupamos es el que se refiere al cálculo de los contravientos. Damos un resumen de la teoría propuesta por Pigeaud, Subdirector de la Escuela de Puentes y Calzadas de París. Con motivo de un proyecto de viga metálica de enrejado múltiple, tuvimos que ocuparnos del cálculo de los contravientos y dimos una teoría que es anterior a la de Pigeaud, pero que sólo fué publicada en 1928, en los «Anales del Instituto de Ingenieros» (1).

I

CÁLCULO DE PUENTES COLGANTES CON VIGA DE RIGIDEZ

Este problema ha preocupado a muchos investigadores, pero los autores que lo han estudiado, dice J. Resal, han creído necesario introducir en sus investigaciones, ciertas hipótesis cuya elección ha sido generalmente hecha con el objeto de simplificar las operaciones algebraicas.

En 1893, hacía notar J. Resal que el problema era completamente determinado, y que toda hipótesis para resolverlo llevaría a su autor por mal camino. En 1894, el ingeniero francés Godard establecía un interesanre teorema que es el punto de partida para las investigaciones de Resal.

Los métodos propuestos por Rankine, Ritter, Levy, etc., que han tomado como punto de partida hipótesis en apariencia plausibles, han llegado a la conclusión falsa que los puentes colgantes estarían sometidos a la ley de Hocke. El efecto de-

(1) Memoria para optar al título de Ingeniero Civil (Anales del Inst. Ing. de Chile, N.o 6, año 1928 y N.o 5, año 1929).

bido a dos causas que actúan simultáneamente, no es la resultante de los efectos parciales que produciría cada una de ellas si actuase aisladamente, puesto que, en un puente colgante, el efecto producido por la sobrecarga es función de la carga permanente, lo que es confirmado por todos los resultados de las experiencias realizadas.

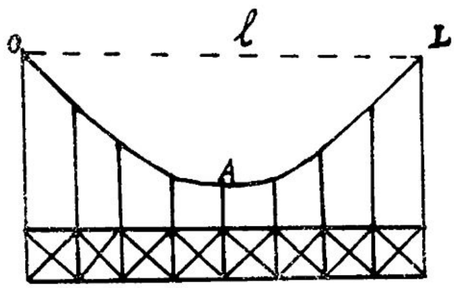


fig. 1

Vamos a establecer brevemente el teorema de Godard. Se demuestra que todo cable flexible describe una curva funicular, relativa a las cargas verticales que lo solicitan. Si suponemos que en el montaje del puente se han regulado las barras de suspensión, de manera que a la temperatura media y en ausencia de toda sobrecarga, la viga de rigidez no se flexione, las barras de suspensión transmiten, entonces, al cable la totalidad de la carga permanente. Si p es la carga permanente por metro corrido se tendrá:

$$Q \frac{d^2y}{dx^2} = -p$$

Como suponemos que la carga permanente por metro corrido es constante, se deduce, entonces, que el cable describe la parábola

$$Q y = \frac{p x}{2} \left(l - x \right)$$

siendo Q la tracción horizontal.

Si se aplica en seguida sobre el tablero, una sobrecarga adicional, la viga de rigidez entra en juego, y el esfuerzo de suspensión, que era igual a p, aumenta de una cantidad que designaremos por π, y que es debida al efecto producido por la sobrecarga, que designamos por r. Si designamos por Q' el nuevo valor de la tracción horizontal, el cable describirá una curva funicular correspondiente a la carga permanente p y a la sobrecarga π, y se tendrá entonces

$$Q' \frac{d^2 y'}{dx^2} = -p - \pi$$

Sea z el desplazamiento vertical, experimentado por un punto del cable cuando ha pasado de la primera a la segunda posición de equilibrio. Haremos la convención de contar positivamente la distancia z de abajo arriba,, es decir, en sentido inverso de las ordenadas y e y', que son medidas positivamente de arriba hacia abajo, a partir de la cuerda que une los dos apoyos del cable. Se tiene entonces

$$z = y - y'$$

Se deduce entonces

$$1)\qquad \frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{d^2 y'}{d x^2} = \frac{\pi}{Q'} + \frac{p}{Q'} - \frac{p}{Q}$$

$$= \frac{1}{Q'}\left[\pi - p\,\frac{Q' - Q}{Q}\right].$$

Consideramos como despreciables respecto a z, las variaciones de longitud que han experimentado las barras de suspensión, cuando el esfuerzo soportado por ellas ha pasado de p a $p + \pi$.

En estas condiciones la viga de rigidez, mantenida a distancia invariable del cable, ha experimentado idénticamente la misma desformación: cada uno de sus puntos ha experimentado el desplazamiento z. Según la resistencia de materiales, la ecuación diferencial de la línea elástica de una viga recta flexionada es, si designamos por X el momento de flexión.

$$2)\qquad E\,I\,\frac{d^2 z}{d x^2} = X$$

siendo I el momento de inercia de la viga y E el coeficiente de elasticidad.

Combinando las ecuaciones (1) y (2) y haciendo

$$\alpha^2 = \frac{Q'}{E\,I}$$

se encuentra

$$3)\qquad X = \frac{E\,I}{Q'}\left[\pi - p\,\frac{Q' - Q}{Q}\right].$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\pi - p\,\frac{Q' - Q}{Q}\right]$$

Si derivamos dos veces la ecuación (3), obtenemos

$$4)\qquad \frac{d^2 X}{d x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\times\frac{d^2 \pi}{d x^2}$$

Pero sabemos que la segunda derivada del momento de flexión en una viga, es igual a la carga por unidad de largo, con signo negativo. Por consiguiente, obtenemos para la viga de rigidez que está sometida a la carga $r - \pi$; la relación:

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = \pi - r$$

De las dos últimas relaciones obtenemos, entonces, la ecuación diferencial del problema:

$$\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{d^2\pi}{d\,x^2} = \pi - r \qquad 5)$$

en la cual π, χ son las variables. La integración nos da

$$\pi = r + A\,e^{\alpha\chi} + B\,e^{-\alpha\chi} \qquad 6)$$

Es esta la fórmula deducida por Godard, en la cual π, α, A, B, son constantes.

Entre las aplicaciones del método de Resal a los Puentes Colgantes debemos mencionar el estudio del ingeniero don Ricardo Solar Puga (Memoria para optar al título de Ingeniero).

II

ACCIÓN DEL VIENTO SOBRE UN PUENTE SUSPENDIDO

Este problema ha sido estudiado por E. Pigeaud, Subdirector de la Escuela de Puentes y Calzadas de París y sucesor de J. Resal, en la cátedra de Resistencia de Materiales (Genie Civil, ano 1925, pág. 82).

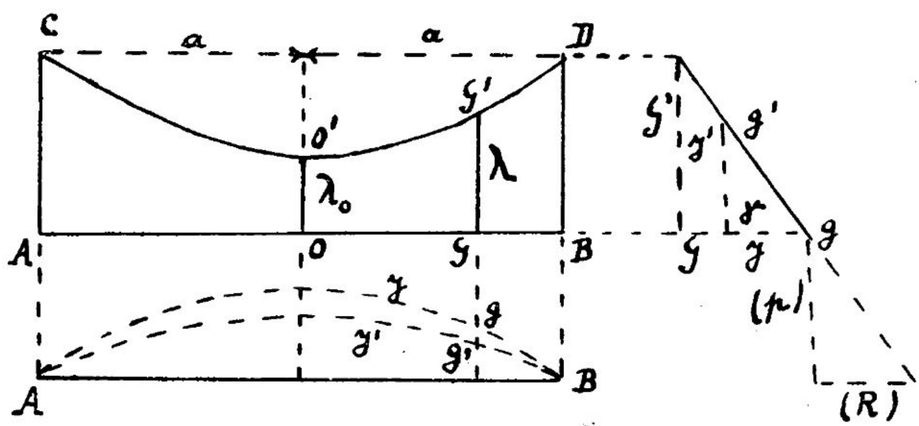


fig 2

En los puentes suspendidos de grandes luces, el estudio del contraviento adquiere bastante importancia, y para no hacer un gasto exagerado de metal conviene darse cuenta de los esfuerzos que los cables pueden ejercer sobre el tablero por intermedio de las barras de suspensión.

Consideremos un puente suspendido que representamos esquemáticamente en la figura 2. En elevación el tablero está representado por la horizontal $A\ G\ B$ de longitud $2\,a$ y los cables por la curva $C\ G'\ D$, generalmente parabólica de flecha f.

Dos puntos correspondientes a una misma abscisa x están ligados por una suspención de longitud λ, el mínimo en el medio de la luz siendo una longitud λ_o que puede ser nula, pero que, en general, será diferente de cero. La acción del viento hace que el tablero y el cable se desplacen en su dirección y describan curvas, cuyas proyecciones horizontales estarán representadas esquemáticamente por $A\,g\,B$ y $A\,g'\,B$. Designaremos por y la ordenada de la primera y por y' de la segunda,

Sobre un plano de perfil que pasa por $G\,G'$, los desplazamientos de los puntos G y G' están respectivamente figurados por $G\,g$, y $G'\,g'$. Despreciamos los desplazamièntos verticales que se han supuesto relativamente pequeños o por lo menos su diferencia. Al mismo grado de aproximación la longitud $g\,g'$ de la suspensión podrá ser reemplazado por su proyección vertical $g'\,\gamma$.

Designaremos por V la intensidad de la acción del viento sobre el tablero a plomo del punto G; sobre un elemento dx la acción será $V\,dx$. En la función V se incluirá la acción del viento sobre la mitad inferior de las suspensiones. Designemos por $V'\,dx$ la fuerza que se ejerce sobre el cable y la mitad superior de las suspensiones en el mismo intervalo dx. Las funciones V y V' son conocidas. Designemos por $R\,dx$ la fuerza que actúa sobre el tablero en sentido inverso del desplazamiento y que ejerce sobre el cable en el sentido del desplazamiento. La fuerza R dx que es la componente horizontal de la tracción ejercida en la suspención $G\,G'$ está ligada al peso del tablero $p\,dx$, por la fórmula

$$7) \qquad \frac{R}{p} = \frac{y - y'}{\lambda}$$

Sobre el tablero actúa una fuerza horizontal de intensidad $V - R$, por consiguiente la ecuación diferencial de su curva deformada será la ecuación bien conocida

$$8) \qquad E\,I\,\frac{d^4 y}{dx^4} = R - V$$

siendo I el momento de inercia de la viga de contraviento y E el coeficiente de elasticidad.

En lo que concierne al cable, él está sometido en cada punto a una fuerza horizontal de intensidad $V' + R$ y la ecuación diferencial de la curva $A\,g'\,B$ que describe en proyección horizontal será de la forma

$$9) \qquad Q\,\frac{d^2 y'}{dx^2} = -V' - R$$

siendo Q la proyección sobre Ox de la tracción T del cable proyección que se sabe es una constante.

Luego la solución del problema depende de la integración de las dos ecuaciones diferenciales simultáneas (8) y (9) en las cuales R es la función definida por la fórmula (7). Estas ecuaciones entran en la clase de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, y se puede aún reconocer muy fácilmente la posibilidad de eleminar la incógnita y' de manera a no tener que considerar más que una sola ecuación. A pesar de esta simplificación y aun en el caso en que se suponga constantes las funciones V, V', p, la presencia del factor λ que es ordinariamente de la forma

$$\lambda = \lambda_o + f \frac{x^2}{a^2}$$

haría difícil la solución analítica pura. Pero se pueden obtener resultados suficientemente exactos recurriendo a un método de integración por aproximaciones sucesivas que se deduce de los estudios del sabio matemático francés E. Picard, (Ver Genie Civil). Derivando dos veces la ecuación (9), obtenemos:

$$Q \frac{d^4 y'}{dx^4} = - \frac{d^2 R}{dx^2}$$

y considerando (8) obtenemos:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^4 y'}{dx^4} = \frac{1}{Q} \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{R - V}{E I}$$

Derivando (7), obtenemos:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^4 y'}{dx^4} = \frac{1}{p} \frac{d^4 (R \lambda)}{dx^4}$$

De las dos últimas se deduce una sola ecuación diferencial

$$\frac{d^4 (R \lambda)}{dx^4} - \frac{p}{Q} \frac{d^2 R}{dx^2} = \frac{R - V}{E I}$$

Se ha supuesto para obtenerla p, V, V', como constantes.

III

CÁLCULO DE LOS CONTRAVIENTOS EN LOS PUENTES METÁLICOS

Con motivo de un proyecto de viga metálica de enrejado múltiple para optar al título de Ingeniero, habíamos dado una teoría para el cálculo de los contravientos y que es anterior a la de Pigeaud, pero que sólo fué publicada en 1928 (Ver Anales del Instituto de Ingenieros, número 6, año 1928, y número 5, año 1929).

Consideremos un puente, vía inferior, de cabezas paralelas, con dos vigas horizontales de contraviento $A B$ y $C D$ (fig. 3), Designemos por q, $2 p$, q_1 la resultante de los empujes horizontales por metro corrido de puente sobre las cabezas superiores, el enrejado y las cabezas inferiores respectivamente. La flexión horizontal de las dos vigas de contraviento sometidas a los momentos de flexión X y X' nos da las dos ecuaciones

$$10) \qquad E\, I\, \frac{d^2 y}{dx^2} = X$$

$$11) \qquad E\, I'\, \frac{d^2 z}{dx^2} = X'$$

en las cuales y, z representan los dos desplazamientos horizontales (fig. 4), a una distancia x de un apoyo y medidos a partir desde un plano vertical $A\,C$ ocupado

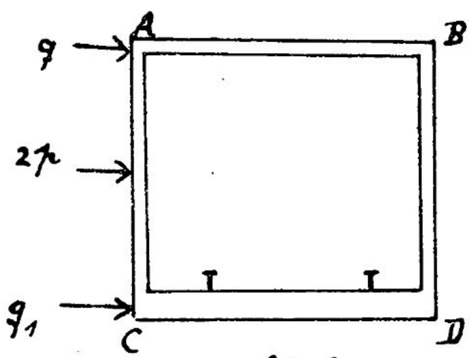


fig. 3

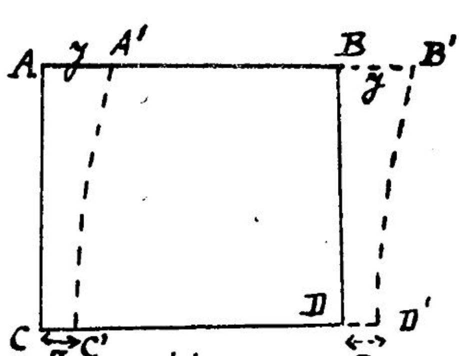


fig. 4.

por una de las vigas antes de la deformación. Designemos por a el largo de un paño. Cada montante $A\,C$ y $B\,D$ podemos considerarlo solicitado por una fuerza igual al producto v, a aplicada en A' o B' y por una carga uniformemente repartida igual a $\frac{p.\,a}{h}$ (fig. 5); por consiguiente, la flecha en su extremo es igual a:

$$12) \qquad y - z = K'\, v + n\, p.$$

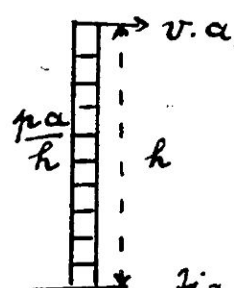


fig. 5

Los coeficientes K' y n dependen de los momentos de inercia de las barras que forman el enrejado. En el tipo Monier, las barras oblicuas son de rigidez pequeña, y entonces, para obtener K y n, basta tomar en cuenta el momento de inercia de los montantes, que son barras de gran rigidez. Consideraremos constante los momentos de inercia I e I'.

El empuje q del viento sobre las cabezas superiores se descompone en dos partes: la primera correspondiente a la viga superior de contraviento y que designaremos por r. Esta viga debe, pues, considerarse apoyada en los montantes extremos y solicitada por una carga de repartición variable que nos proponemos determinar. La segunda parte corresponde a los montantes de las dos vigas verticales del puente y tiene por valor $2v$ por metro corrido; ella es transmitida por intermedio de los montantes flexionados a la viga inferior de contraviento (ver fig. 4) luego:

$$2v + r = q \tag{13}$$

Las dos ecuaciones que nos faltan para determinar el problema, lo obtendremos considerando que la segunda derivada del momento de flexión en una viga con una carga de repartición variable o constante, t tiene por valor:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -t$$

Aplicando esta relación a las dos vigas de contraviento tenemos entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} = -r \\[2ex] \dfrac{d^2 X'}{dx^2} = -q_1 - 2p - 2v \end{cases} \tag{14}$$

y designando

$$q_1 + 2p = r'$$

obtenemos:

$$q_1 + 2p + 2v = r' + q - r$$

y llevando este valor en la segunda de las ecuaciones (14), obtenemos

$$\frac{d^2 X'}{dx^2} = -r' + r - q \tag{15}$$

Derivando la ecuación (10), obtenemos:

$$E\,I\,\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 X}{dx^2}$$

y considerando la primera ecuación (14), se deduce:

$$E\,I\,\frac{d^4 y}{dx^4} = -r \tag{16}$$

Análogamente se deduce de (11) y (15),

17) $$E\, I' \frac{d^4 z}{dx^4} = -r' + r - q$$

De (16) y (17), se obtiene:

18) $$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{r' + q}{E\, I'} - \frac{r\,(I + I')}{E^2\, I\, I'}$$

Derivando ecuaciones (12) y (13) obtenemos fácilmente:

19) $$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^4 z}{dx^4} = K' \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{K'}{2} \cdot \frac{d^4 r}{dx^4}$$

Hemos supuesto p y q constantes. De (18) y (19) se deduce, entonces, la ecuación diferencial del problema propuesto,

20) $$\frac{K'}{2} \cdot \frac{d^4 r}{dx^4} = \frac{r\,(I + I')}{E\, I\, I'} - \frac{r' + q}{E'\, I'}$$

La solución general de esta ecuación es:

21) $$r = C_1\, e^{\alpha\chi} + C_2\, e^{-\alpha\chi} + C_3 \cos \alpha\chi + C_4 \operatorname{sen} \alpha\, \chi + \frac{(q + r')\, I}{I + I'}$$

siendo

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{2\,(I + I')}{K'\, E\, I\, I'}}$$

siendo C_1, C_3, C_3, C_4, cuatro constantes, Por consiguiente, *la viga superior de contraviento horizontal debe considerarse apoyada en los montantes extremos y sometida a una carga repartida horizontal variable r, definida por la ecuación* (21).

Hemos demostrado en nuestra Memoria las relaciones siguientes entre las cuatro constantes:

$$C_2 = C_1\, e^{\alpha L}$$

$$C_3 = C_1 + C_2 = C_1\,(1 + e^{\alpha L})$$

$$C_4 = C_3\, tg\, \frac{\alpha L}{2} = \left(1 + e^{\alpha L}\right) tg\, \frac{\alpha L}{2} \cdot C_1$$

siendo L la luz del tramo. Reemplazando estos valores en (21), obtenemos:

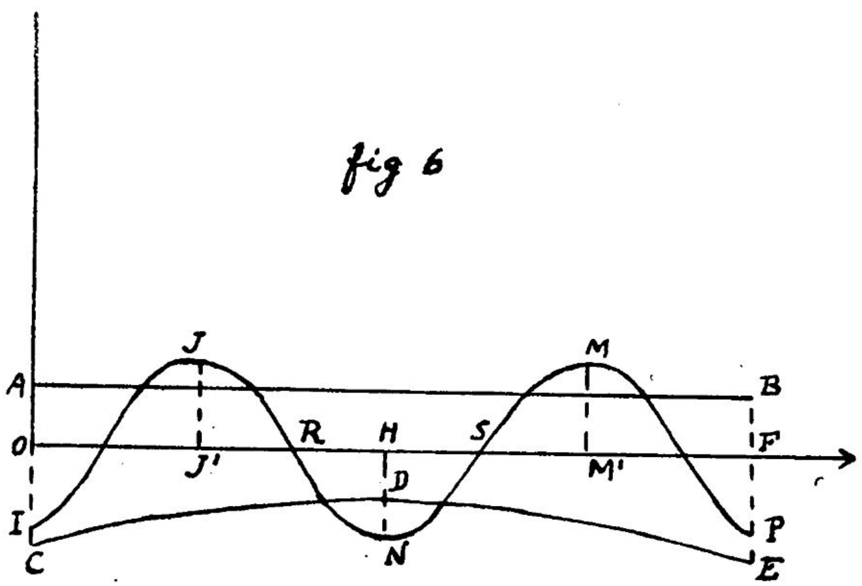
$$22) \quad r = \frac{(q + r')\, I}{I + I'} + C_1 \left[e^{\alpha \chi} + e^{\alpha (L - \chi)} \right] + C_1 \left(1 + e^{\alpha L}\right) \left(\cos \alpha \chi + tg \frac{\alpha L}{2} \cdot sen\, \alpha \chi \right)$$

ecuación que se compone de 3 partes. La primera parte $\frac{(q + r')\, I}{I + I'}$ la representamos por una paralela $A\,B$ al eje de las χ. La segunda parte

$$V = C_1 \left[e^{\alpha \chi} + e^{\alpha (L - \chi)} \right]$$

representa una curva $C\,D\,E$ simétrica respecto a la mitad de la luz; en efecto, si se reemplaza $L - \chi$, en lugar de χ, la función anterior no cambia. El mínimum corresponde a $\chi = \frac{L}{2}$:

$$V_{min} = 2\, C_1\, e^{\frac{\alpha L}{2}} = H\,D$$



Para $\chi = o$ y $\chi = L$ se obtiene:

$$V = C_1 \left(1 + e^{\alpha L}\right) = O\,C = F\,E.$$

La tercera parte de (22):

$$W = C_1 \left(1 + e^{\alpha L} \right) \left(\cos\, \alpha \chi + tg \frac{\alpha L}{2}\; sen\, \alpha \chi \right)$$

es una sinusoide de período

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\,R\,S$$

simétrica respecto a la mitad del tramo; para demostrarlo basta reemplazar $L - \chi$ en lugar de χ. Su amplitud es fácil obtener, pues siendo simétrica basta hacer $\chi = \frac{L}{2}$ para obtenerla:

$$W_1 = \frac{C_1\,(l + e^{\alpha L})}{\cos \frac{\alpha L}{2}} = H\,N = J\,J' = M\,M'$$

La sinusoide está representada por $I\,J\,N\,M\,P'$ (fig. 6). (Consultar «Anales del Instituto de Ingenieros de Chile», año 1928, página 295).