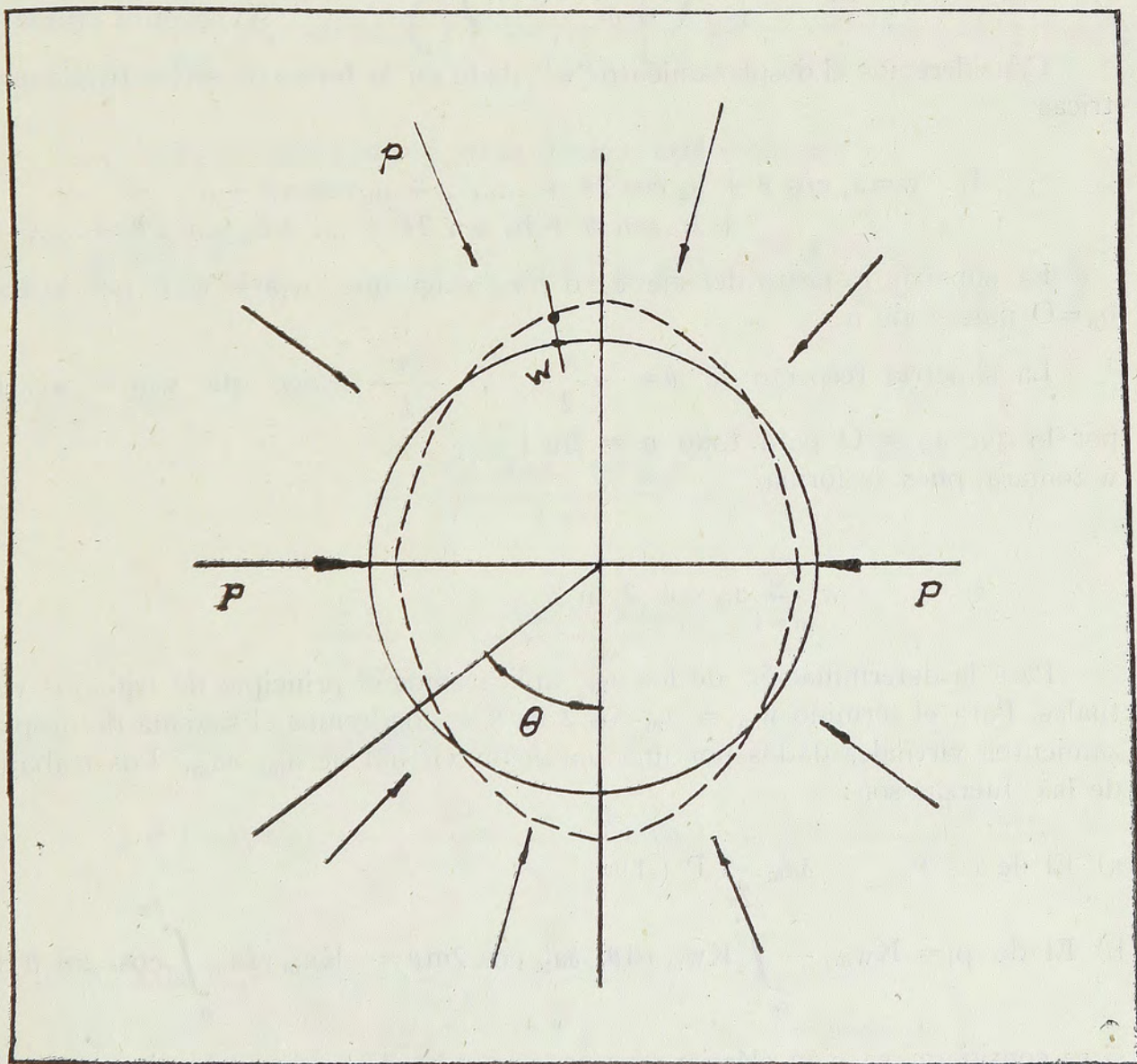


## Flambleo de un anillo circular en medio elástico

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural  
por el Ing. uruguayo Prof. Enrique R. Penadés

### 1.º Solución simétrica.

Sea un anillo circular de radio « $r$ » y sección constante, sometido a una presión « $p$ » uniforme, rodeado de un medio elástico que provoca reacciones del tipo





$p_1 = kw$ , en que «w» es la deformación radial, contada positivamente hacia afuera.

Podrá admitirse que las « $p_1$ » existen sólo para «w» positivos, o para todo «w».

El método aplicado por Timoshenko en *Elastic Stability*, art. 40, permite determinar el valor crítico de la presión «p».

Al estado de tensión proveniente de la presión «p», consistente en una compresión constante

$$1) \quad S = pr$$

superponemos los momentos de flexión provenientes de dos cargas concentradas P, en las secciones  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$  radiales y diametralmente opuestas más los producidos por las reacciones « $p_1$ .» Suponemos esta flexión inextensional vale decir, que S queda invariada.

La influencia de S en el momento se obtendrá agregando a las fuerzas que, producen momento, una carga radial ficta de intensidad

$$2) \quad p_2 = \frac{S}{r^2} \left( \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) \quad (\text{Ver obra citada})$$

Consideremos el desplazamiento «w», dado en la forma de series trigonométricas

$$3) \quad w = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + b_n \sin n\theta + \dots$$

La simetría respecto del eje  $\theta = 0, \pi$ , exige que  $w(\theta) = w(-\theta)$  por lo que  $b_n = 0$  para todo n.

La simetría respecto de  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  exige que  $w(\theta) = w(\pi - \theta)$

por lo que  $a_n = 0$  para todo  $n = 2m - 1$ .  
w tomará, pues, la forma:

$$4) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2m\theta$$

Para la determinación de los  $a_m$  aplicaremos el principio de trabajos virtuales. Para el término  $w_m = a_m \cos 2m\theta$ , supondremos el sistema de desplazamientos virtuales dados por una variación virtual de  $a_m$ ,  $\delta a_m$ . Los trabajos de las fuerzas son:

$$a) \quad \text{El de las P,} \quad \delta a_m \cdot 2P (-1)^m$$

$$b) \quad \text{El de } p_1 = Kw_m, \quad - \int_0^{2\pi} Kw_m r d\theta \cdot \delta a_m \cos 2m\theta = -Ka_m r \delta a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 2m\theta d\theta$$

si se considera reacción elástica tanto para «w» positiva como negativa, y  $\frac{1}{2}$  de



ese valor si se la considera sólo para «w» positiva, cosa que haremos en lo que sigue; el signo — proviene de que las fuerzas son opuestas a las deformaciones.

$$c) \text{ El de } p_2 = \frac{S}{r^2} \left( \frac{d^2 w_m}{d\theta^2} + w_m \right), \quad - \int_0^{2\pi} \frac{S}{r^2} \left( \frac{d^2 w_m}{d\theta^2} + w_m \right) r \cdot d\theta \cdot \delta a_m \cos 2m\theta$$

$$\text{y con } \frac{d^2 w_m}{d\theta^2} = -4m^2 a_m \cos 2m\theta,$$

$$+ \frac{S}{r} (4m^2 - 1) a_m \delta a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 2m\theta \, d\theta$$

Se tendrá, pues, para la expresión de los trabajos virtuales, siendo V la energía de deformación, y observando que  $\int_0^{2\pi} \cos^2 2m\theta \, d\theta = \pi$

$$5) \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} \delta a_m = \delta a_m \left( 2P (-1)^m - \left[ \frac{1}{2} Kr - \frac{S}{r} (4m^2 - 1) \right] \pi a_m \right)$$

La energía de deformación en la flexión, está dada por

$$V = \int \frac{M^2 r \, d\theta}{2EI} \quad \text{en la que } M = -\frac{EI}{r^2} \left( \frac{d^2 w_m}{d\theta^2} + w_m \right)$$

Resulta, pues:

$$V = \frac{EI (4m^2 - 1)^2 a_m^2}{2r^3} \pi$$

$$6) \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = \frac{(4m^2 - 1)^2 \pi EI}{r^3} a_m$$

Igualando con el valor anterior:

$$7) \quad 2P (-1)^m - \pi a_m \left[ \frac{Kr}{2} - \frac{S}{r} (4m^2 - 1) \right] = \frac{(4m^2 - 1)^2 \pi EI}{r^3} a_m$$

$$\text{de donde sale } a_m = \frac{2P (-1)^m}{\frac{(4m^2 - 1)^2 \pi EI}{r^3} + \pi \left[ \frac{Kr}{2} - \frac{S}{r} (4m^2 - 1) \right]}$$



o sea

$$8) \quad a_m = \frac{2 P r^3 (-1)^m}{\pi E I (4m^2 - 1)^2 \left[ 1 + \frac{K r^4}{2(4m^2 - 1)^2 E I} - \frac{S r^2}{(4m^2 - 1) E I} \right]}$$

Y la expresión general de «w» sería:

$$9) \quad w = \frac{2 P r^3}{\pi E I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos 2 m \theta}{(4m^2 - 1)^2 \left[ 1 + \frac{K r^4}{2(4m^2 - 1)^2 E I} - \frac{S r^2}{(4m^2 - 1) E I} \right]}$$

El estado crítico surge del hecho de que, independientemente de las P, «w» crece indefinidamente al hacerse 0 algunos de los denominadores.

La compresión crítica  $S_c$  sería:

$$10) \quad S_c = \frac{(4m^2 - 1) E I}{r^2} + \frac{K r^2}{2(4m^2 - 1)}$$

Para  $m = 1$  y  $k = 0$ , se obtiene la compresión de flambéo del anillo libre.

$$11) \quad S_c = \frac{3 E I}{r^2}$$

Para obtener el menor valor de  $S_c$ , derivamos respecto de  $m$ :

$$12) \quad \frac{8m E I}{r^2} - \frac{K r^2}{2(4m^2 - 1)^2} 8m = 0 \therefore (4m^2 - 1)^2 = \frac{K r^4}{2 E I}$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{1 + r^2 \sqrt{\frac{K}{2 E I}}}$$

La compresión crítica mínima se obtiene de 10) para «m» igual al entero más próximo al valor 12), o, en todo caso, será el menor de los valores correspondientes a los enteros inmediatos.

Si la fórmula 10) valiera para cualquier «m», aún no entero, se obtendría un resultado curioso de sustituir en ella el valor  $(4m^2 - 1)^2$  por  $\frac{K r^4}{2 E I}$

Este sería:

$$13) \quad S_c \text{ mín} = \sqrt{2 K E I}$$

y resultaría independiente del radio. Desde que, en todo caso,

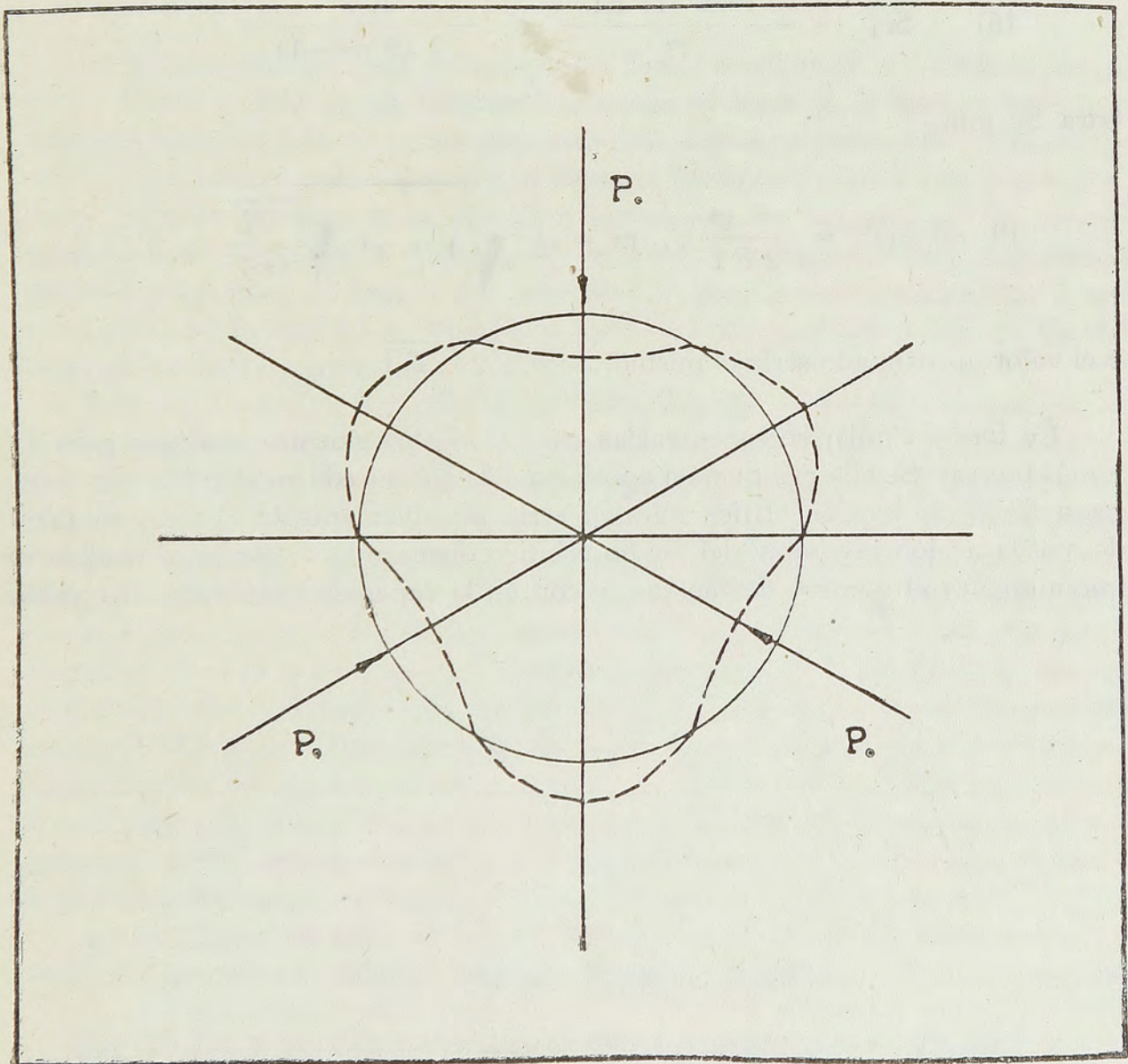
$\sqrt{2 K E I} \leq S_c \text{ mín}$ , este valor da una solución expeditiva del problema.

A continuación se expresan los resultados para un anillo de hormigón ( $E = 200.000$  K./cm.<sup>2</sup>), de 20 m. de diámetro y 30 cm. de espesor ( $I = 2.250 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}}$ ) para varios valores de K, junto con el «m» correspondiente al mínimo y los valores de  $p_{cr}$  y  $\sigma_{cr}$



$\frac{K}{\text{cm}^3}$	m	$\frac{Sc}{\text{cm}}$	$\frac{\sqrt{2KEI}}{\text{cm}}$	$\frac{p_{cr}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\sigma^{cr}}{\text{cm}^2}$
10	5	95.000	94.800	95,0	3.170
5	4	68.100	67.000	68,1	2.270
2	3	44.300	42.400	44,3	1.440
1	3	30.300	30.000	30,3	1.010
0,1	2	10.080	9.480	10,08	336
0	1	1.350	—	1,35	45

El resultado expresa la influencia decisiva de la resistencia opuesta por el medio elástico, en el sentido de que la carga de flamdeo excede a la de ruptura por aplastamiento, a menos que el medio elástico sea excesivamente flojo, resultado análogo al encontrado por Cummings en el estudio de pilotes largos en medio elástico, y comprobado experimentalmente por el citado autor (véase Terzaghi, *Mechanics of soils*).





## 2.º Solución antisimétrica.

Proviene de estudiar tres cargas iguales en los puntos definidos por

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ y } \theta = \pi$$

La función «w» toma la forma

$$14) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 3m \theta$$

y  $a_m$  resulta

$$15) \quad a_m = \frac{3 P (-1)^m r^3}{\pi E I (9m^2 - 1)^2 \left[ 1 + \frac{K r^4}{2(9m^2 - 1)^2 E I} - \frac{S r}{(9m^2 - 1) E I} \right]}$$

y para la compresión crítica

$$16) \quad S_{c1} = \frac{(9m^2 - 1) E I}{r^2} + \frac{K r}{2 (9m^2 - 1)}$$

para  $S_c$  mín.

$$(9m^2 - 1)^2 = \frac{K r^4}{2 E I} \therefore m = \frac{1}{3} \sqrt{1 + r^2 \sqrt{\frac{K}{2 E I}}}$$

y el valor aproximado sería el mismo,  $S_c \approx \sqrt{2 K E I}$

En forma similar se encontrarían expresiones totalmente análogas para 4,5 y más fuerzas. Se observa que, en oposición a lo que sucede en el anillo o la barra recta libres, la tensión crítica mínima sería sensiblemente la misma, en razón de que la acción favorable del medio elástico disminuye su efecto, a medida de que aumenta el número de fuerzas, y con él, la capacidad resistente del anillo.