Estudios de Administración, vol. 14, Nº 1, 2007, pp. 71-80

Nota técnica duración modificada en caso de TIR efectiva

Jaime Valenzuela O.
Universidad Adolfo Ibañez,Chile
jaime.valenzuela@uai.cl

Abstract

The objective of this technical note is to clarify how Macaulay's duration should be modified when the internal rates of return (IRR) on fixed income financial assets are expressed in terms of an effective annual rate. In Chile the usual market practice is to utilize effective IRR, and it leads to an error when modifying Macaulay's duration using the usual textbook formula (simple TIR). This technical note demonstrates mathematically the correct formula to modify duration for the case of effective IRR.

Keywords: Duration, modified duration, effective IRR.

Resumen

El objetivo de esta nota es aclarar cómo la duración de Macaulay debe ser modificada para los casos en que las tasas internas de retorno (TIR) de los instrumentos de renta fija se expresan en tasa efectiva anual. En Chile, la práctica de mercado es utilizar TIR efectiva, por lo que al modificar la duración de Macaulay utilizando la fórmula usual de los libros de texto (TIR simple) se comete un error. Se demuestra matemáticamente la forma correcta de modificar la duración para el caso de TIR efectiva.

Palabras clave: Duración, duración modificada, TIR efectiva.

1. Introducción

El objetivo de la presente nota es aclarar la forma como la duración de Macaulay debe ser modificada en el caso de que las tasas internas de retorno (TIR) de los instrumentos de renta fija se expresan en tasa efectiva anual. Existe una amplia tendencia a realizar la modificación mencionada de la misma forma como se ajusta la duración de Macaulay en el caso de que la TIR se expresa en términos simples, probablemente por el hecho de que las fórmulas de duración mayoritariamente se toman de los textos de finanzas norteamericanos, los cuales trabajan con TIR simple, que corresponde a la práctica en USA. Sin embargo, en otros países como Chile la práctica de mercado es utilizar la TIR efectiva, por lo que al modificar la duración utilizando la fórmula de USA se comete un error.

En la segunda sección se define la diferencia entre una TIR simple y una TIR efectiva, y se explica por qué, en términos conceptuales, es lógico que en el caso de TIR simple en la modificación de la duración de Macaulay se considere el número de pagos de cupones por año, y en el caso de TIR efectiva no se considere.

Las secciones 3 y 4 demuestran en forma empírica y matemática que la forma de modificar la duración que se propone en esta nota es la correcta para el caso de TIR efectiva. En la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. TIR efectiva y TIR simple

La TIR efectiva anual corresponde a la TIR a la que se descuentan los cupones de un bono calculado utilizando la siguiente fórmula:

$$TIR\ cupones = \left(1 + TIR_{anual}\right)^{1/n},$$

donde

n : corresponde al número de cupones por año que paga el bono.

La TIR simple es la TIR a la que se descuentan los cupones de un bono, calculada utilizando la siguiente fórmula:

$$TIR\ cupones = \frac{TIR_{\ anual}}{n}.$$

La diferencia fundamental es que la TIR efectiva anual, tal como su nombre lo sugiere, es siempre la misma, independiente del número de cupones pagados por año. En cambio, la TIR efectiva anual que se obtenga cuando la TIR se expresa en forma simple va a ser función del número de cupones. Cuando las TIR son expresadas en forma efectiva, las TIR efectivas anuales de distintos instrumentos se pueden comparar en forma directa, en cambio en el caso de TIR expresadas en forma simple, al comparar instrumentos se debe calcular la denominada tasa efectiva anual (TEA), la cual se calcula de la siguiente forma:

$$TEA = (1 + TIR\ cupones)^n.$$

La duración de Macaulay es ampliamente utilizada para medir la sensibilidad del precio de un instrumento a cambios en su TIR. Su definición es:

$$Duración\ Macaulay = \frac{\sum_{t=1}^{n} PV(Ct) \times t}{\Pr ecio}$$

donde

$PV(Ct)$: Valor presente del cupón que se paga en el período *t,*
n : número de cupones del bono.

La duración que se debe utilizar para estimar un cambio porcentual en el precio ante un cambio en la TIR no es directamente la de Macaulay, sino la duración modificada (detalles se muestran en sección de demostraciones matemáticas). La forma de modificar la duración de Macaulay en el caso de que las TIR de los instrumentos se expresan en forma simple es:

$$Duración\,Modificada = -\frac{1}{1+\frac{y}{n}} \times \left[Duración\ de\ Macaulay\right]\ (1),$$

donde

y : TIR anual simple del bono

De acuerdo a lo mencionado en la introducción, es frecuente que la fórmula anterior también se utilice para modificar la duración cuando las TIR se expresan en forma efectiva. Este error es muy común en aquellos mercados cuya práctica es usar TIR efectiva, como es el caso de Chile. La presente minuta propone que la fórmula que debe utilizarse para modificar la duración en caso de TIR efectiva es la siguiente:

$$Duración\ Modificada = -\frac{1}{1+y} \times \left[Duración\ de\ Macaulay\right] (2).$$

Conceptualmente parece correcto que en el caso de TIR efectiva la modificación de la duración no considere el número de cupones por año, ya que, tal como se afirmó, la TIR efectiva anual es siempre la misma, independiente del número de cupones. En cambio, en el caso de TIR simple sí parece razonable que al modificar la duración se considere el número de cupones, ya que la TIR efectiva anual en este caso sí depende del número de cupones.

3. Ejemplo numérico

Se usará como ejemplo un bono a 2 años, emitido a una tasa del 10% anual, con cupones semestrales sólo de intereses. El valor facial del bono es de \$1.000.000. Se estimará el precio del bono utilizando la duración modificada, asumiendo una TIR de colocación del 11%. Primero se utilizará TIR simple y luego TIR efectiva, y se evaluará qué fórmula de ajuste de duración, la (1) o la (2), logra una aproximación más cercana al cambio exacto en el precio en cada caso.

A. Tasa de emisión simple y TIR simple

En este caso la tasa de los cupones es de 5%, por lo que los tres primeros cupones son de \$50.000 cada uno, y el cuarto es de \$1.050.000. El precio exacto a una TIR del 11% es de:

$$\mathrm{Pr}\,ecio = \frac{50.000}{1,055} + \frac{50.000}{1,055^2} + \frac{50.000}{1,055^3} + \frac{1.050.000}{1,055^4} = 982.474\,.$$

La duración de Macaulay del bono es:

$$D.Macaulay = \frac{1\times\frac{50.000}{1,05} + 2\times\frac{50.000}{1,05^2} + 3\times\frac{50.000}{1,05^3} + 4\times\frac{1.050.000}{1,05^4}}{1.000.000} = 3,7232\ semestres$$

La duración de Macaulay en años es:

$$D.Macaulay = \frac{3,7232}{2} = 1,8616\ años\,.$$

Para estimar el cambio en el precio se modifica la duración de Macaulay utilizando la fórmula mostrada en (1):

$$Duración\ Modificada = -\frac{1}{\left(1+\frac{y}{n}\right)} \times \left(D.Macaulay\right) = -\frac{1}{1,05} \times 1,8616 = -1,773$$

Ahora procedemos a estimar el cambio en el precio multiplicando la duración ajustada por el cambio en TIR:

$$Cambio\ en\ precio = -1,773 \times \left(11\% - 10\%\right) = -0,01773 = -1,773\%.$$

Aplicando al precio inicial de $1.000.000, se llega a que el precio estimado utilizando la duración modificada es de $982.270. Como el precio calculado en forma exacta es de $982.474, el uso de la duración modificada se equivoca en -$204.

Si se utiliza la fórmula de modificar la duración de Macaulay dividiendo por (1+*y*), el precio estimado sería $983.087, y la equivocación sería de $613, es decir en el caso de TIR simple vemos que la duración modificada con (1+*y*/*n*) estima mejor el cambio en el precio que la modificada usando (1+*y*).

B. *Tasa de emisión y TIR efectiva*

En este caso la tasa de los cupones es la siguiente:

$$Tasa\ cupones = 1,1^{.5} - 1 = 4,88\%.$$

Los tres primeros cupones son de $ 48.800 y el último cupón es de $1.048.800.

El precio del bono a una TIR efectiva del 11% es:

$$Tasa\ semestral = 1,11^{.5} - 1 = 5,357\%$$

$$\Pr ecio = \frac{48.800}{1,05357} + \frac{48.800}{1,0537^2} + \frac{48.800}{1,0537^3} + \frac{1.048.800}{1,0537^4} = 983.272$$

La duración de Macaulay es:

$$D.Macaulay = \frac{1 \times \frac{48.800}{1,0488} + 2 \times \frac{48.800}{1,0488^2} + 3 \times \frac{48.800}{1,0488^3} + 4 \times \frac{1.048.800}{1,0488^4}}{1.000.000} = 3,7293 \text{ } semestres$$

Después de dividir en 2 para expresarla en años la procedemos a modificar, pero dividiendo por (1+*y*):

$$D.Modificada = -\frac{1.86465}{1.1} = -1,6951.$$

El cambio estimado en el precio es:

$$Cambio \text{ } estimado = -1,6951 \times \left(11\% - 10\%\right) = -1,6951\%.$$

Aplicando al precio inicial de \$1.000.000 se llega a que el precio estimado es de \$983.049. Como el precio exacto es de \$983.272, la estimación por duración modificada se equivoca en \$-223. Si en vez de modificar la duración por (1+y) la modificáramos por (1+y/n) el precio estimado sería de \$982.241, y por ende la equivocación sería de \$-1.031.

Como vemos en estos ejemplos, si se usan tasas de emisión y TIR simple lo correcto es utilizar la fórmula (1) para modificar la duración, tal como lo muestran la mayoría de los textos de finanzas, que son escritos según la práctica de mercado de USA (por ejemplo ver a Fabozzi). Sin embargo, para el caso de tasas y TIR efectivas la mejor aproximación se logra modificando la duración según la ecuación (2). La práctica ampliamente empleada en aquellos mercados que utilizan TIR efectivas de modificar la duración usando la misma fórmula que en USA no es correcta.

4. Demostración matemática

Falta demostrar en forma matemática que: i) parece conceptualmente correcto para el caso de TIR efectiva, y ii) en el ejemplo de la segunda sección funciona mejor.

A. Utilizando TIR efectiva

La ecuación del precio de un bono que paga cupones de intereses y el capital al final utilizando TIR efectiva anual es:

$$P=\sum_{t=1}^{x}\frac{C}{\left(1+y\right)^{\frac{t}{n}}}+\frac{m}{\left(1+y\right)^{\frac{x}{n}}}$$

donde

C : Cupón por período,
m : principal,
x : plazo en períodos = n multiplicado por plazo en años.

Diferenciando la ecuación anterior respecto a y tenemos:

$$\frac{\partial \Pr ecio}{\partial y}=\sum_{t=1}^{x}\frac{-\frac{t}{n}C}{\left(1+y\right)^{\frac{t}{n}}\left(1+y\right)}+\frac{-\frac{x}{n}m}{\left(1+y\right)^{\frac{x}{n}}\left(1+y\right)},$$

factorizando tenemos:

$$\frac{\partial \Pr ecio}{\partial y}=-\frac{1}{\left(1+y\right)}\times\left[\frac{1}{n}\times\left(\sum_{t=1}^{x}\frac{tC}{\left(1+y\right)^{\frac{t}{n}}}+\frac{xm}{\left(1+y\right)^{\frac{x}{n}}}\right)\right].$$

El múltiplo dentro del paréntesis redondo corresponde a la duración de Macaulay expresada en períodos, el cual, al multiplicarse por $1/n$ nos lleva a la duración de Macaulay expresada en años (paréntesis cuadrado). Como vemos, la modificación se alcanza multiplicando el paréntesis cuadrado por $1/(1+y)$, tal como se postula en las secciones anteriores.

B. Utilizando TIR simple

En el caso de TIR anual simple, la ecuación del precio para un bono con cupones de intereses y pago del capital al final es:

$$P = \sum_{t=1}^{x} \frac{C}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^{t}} + \frac{m}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^{x}},$$

derivando respecto a y tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{t=1}^{x} \frac{-t \times C}{n\left(1+\frac{y}{n}\right)^{t+1}} + \frac{-xm}{n\left(1+\frac{y}{n}\right)^{x+1}},$$

factorizando tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{\left(1+\frac{y}{n}\right)} \times \left[\frac{1}{n} \times \left(\sum_{t=1}^{x} \frac{-t \times C}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^{t}} - \frac{xm}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^{x}}\right)\right].$$

El término que está en el paréntesis redondo corresponde a la duración de Macaulay expresada en períodos. Al multiplicarla por $1/n$ llegamos a la duración de Macaulay expresada en años (paréntesis cuadrado). Por ende, para modificar la duración de

Macaulay expresada en años se multiplica por $1/(1+y/n)$. Se confirma lo planteado en las secciones anteriores: para modificar la duración en casos de tasas simples se divide por $(1+y/n)$.

5. Conclusión

La presente nota corrige un error muy recurrente en aquellos mercados de capitales en los cuales la práctica es transar los bonos con más de un cupón por año en base a TIR efectiva. En estos mercados simplemente se modifica la duración de la misma forma que se hace en los mercados que usan TIR simple, es decir, dividiendo la duración de Macaulay por $(1+y/n)$. Esto no es correcto, ya que al utilizar TIR efectiva la duración se debe modificar dividiendo la duración de Macaulay por $(1+y)$.

Referencias

FABOZZI, FRANK J. "Bonds Markets, Analysis, and Strategies", Quinta Edición, Pearson Prentice Hall.

KOPPRASCH, R.W. (1985), "Understanding Duration and Volatility", Salomon Brothers Inc, septiembre 1985.